

# Ein Ergodensatz für iterierte Kerne

vorgelegt von

Jürgen Voorgang  
und  
Helge Kahler

Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

Januar 1993

# Inhalt

Die mit K bezeichneten Abschnitte wurden von Helge Kahler, die mit V bezeichneten von Jürgen Voorgang niedergeschrieben.

## 1. Einleitung und bisherige Ergebnisse

1.1 Einleitung .....	3	KV
1.2 Bisherige Ergebnisse .....	5	KV

## 2. Einführung zu Systemen iterierter Funktionen

2.1 Systeme iterierter Funktionen .....	7	K
2.2 Dynamische Systeme und IFS .....	12	K
2.3 Maße auf Attraktoren .....	22	K
2.4 Dimension von Fraktalen .....	26	V

## 3. Ergodensatz für iterierte Kerne

3.1 Modelle und Notationen .....	32	V
3.2 Invariantes Maß auf $\mathcal{M}_1(S)$ .....	44	V
3.3 Ergodensatz auf $\mathcal{M}_1(S)$ .....	54	K
3.4 Ergodensatz auf S .....	61	K

4. Literaturverzeichnis .....	71	VK
-------------------------------	----	----

## Anhang A - Programmbeschreibungen

A.1 SGI Indigo, Atari ST/TT und PC .....	73	V
A.2 Apple Macintosh .....	83	K

# 1. Einleitung und bisherige Ergebnisse

## 1.1 Einleitung

Die vorliegende Arbeit beweist einen Ergodensatz für iterierte Kerne, die gewissen Kontraktionsbedingungen genügen.

Wir betrachten einen Markov-Prozeß  $Z^*$  auf einem polnischen Raum  $S$ . Der Prozeß ist gegeben durch einen Startpunkt  $x \in S$  und einen Übergangskern  $K(x, \cdot) = \sum_{i=1}^N p_i K_i(x, \cdot)$ .

$K_i(x, \cdot)$  ist für  $i = 1, \dots, N$  Übergangskern auf  $S$  mit zugeordneter Wahrscheinlichkeit  $p_i$ ,

$$\sum_{i=1}^N p_i = 1; K \text{ bzw. die } K_i \text{ sind im Schnitt kontraktiv, d.h. } \prod_{i=1}^N d_W(vK_i, \lambda K_i)^{p_i} \leq r d_W(v, \lambda),$$

wobei  $d_W$  die Wassersteinmetrik auf  $\mathcal{M}_1(S)$  und  $r < 1$  ist. Beim Prozeß  $Z^*$  wird zu jedem Zeitpunkt ein  $K_i$  gemäß der  $p_i$  ausgewählt, und dann wird abhängig von  $K_i$  fortgeschritten; der Prozeß befindet sich also zur Zeit  $n+1$  in einem Punkt  $x_{n+1} \in S$ , der sich aus  $x_n$  sowohl aus der zufälligen Wahl von  $p_i$  als auch aus dem durch  $K_i$  bedingten Zufall ergibt. Für

$$Z^* = Z_j^x(\bar{\omega}) \text{ ist } \hat{\omega} = \{(i_1, i_2, i_3, \dots): 1 \leq i_k \leq N \forall k\} \in \Omega = N^{\mathbb{N}} \text{ und } \bar{\omega} \in \bar{\Omega} = S^{\{0,1,2,\dots\}} \times \Omega, x \in S$$

der beliebige Startpunkt des Prozesses, und  $j$  ist der Zeitparameter.  $\mu$  ist das eindeutige invariante Maß für den Prozeß in dem Sinne, daß  $\mu = \mu K$ , und auf  $\bar{\Omega}$  erhalten wir via

Ionescu-Tulcea  $P_x$ , die Verteilung des Prozesses  $Z_j^x(\bar{\omega})$  bei Start in  $x$ .

Unter diesen Voraussetzungen zeigen wir für beliebigen Startpunkt  $x \in S$ :

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f(Z_j^x(\bar{\omega})) \rightarrow \int f d\mu \quad \forall f \in \mathcal{C}_b(S) \quad P_x \text{-f.s.}$$

Die empirische Verteilung des durch eine endliche Kollektion von Kernen mit dieser schwachen Kontraktivitätseigenschaft gegebenen Markovprozesses  $Z_j^x(\bar{\omega})$  konvergiert also fast sicher schwach gegen das für den Prozeß eindeutige invariante attraktive Maß  $\mu$  für beliebigen Startpunkt. Insbesondere läßt sich  $\mu$  durch eine typische Trajektorie des Prozesses "erzeugen", für ein  $\mu$ -randloses  $B \subset S$  ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#\{k: 0 \leq k \leq n, Z_k^x(\bar{\omega}) \in B\}}{n+1} = \mu(B) \quad P_x \text{-f.s.}$$

Damit leisten wir eine Verallgemeinerung der in [BE] und [E] vorgestellten Ergebnisse in der Weise, daß der Übergangsmechanismus der Markovkette nun einen doppelten Zufall

beinhaltet, während in [BE] und [E] bei festem Startpunkt die Trajektorie des Prozesses  $Z_j^x(\hat{i})$  allein durch die Folge  $\hat{i} = (i_1, i_2, i_3, \dots)$  der Indizes zufällig aus einer endlichen Menge  $\{w_1, w_2, \dots, w_N\}$  ausgewählter Transformationen bestimmt wurde. In der vorliegenden Arbeit läßt sich auch bei bekanntem Startpunkt  $x$  mit der Folge  $K_{i_1}, K_{i_2}, K_{i_3}, \dots$  der zufällig ausgewählten Kerne nicht mehr, wie bei Transformationen, zu jedem Zeitpunkt der genaue Aufenthaltsort einer Trajektorie des Prozesses  $Z_j^x(\omega)$  im Raum  $(S, d)$  angeben, und zusätzliche Überlegungen werden notwendig.

In Kapitel 3.3 liften wir die Betrachtungen von [BE] und [E] vom Zustandsraum  $S$  auf den Raum  $(\mathcal{M}_1(S), d_w)$  der Wahrscheinlichkeitsverteilungen mit der Wasserstein - Metrik, in dem die Kerne  $K_i(x, \bullet)$  die Funktion haben, die im ursprünglichen Modell von [BE] und [E] auf  $S$  den Transformationen zufiel: Sie erzeugen einen Prozeß  $\bar{Z}_n^v(\hat{i})$  von Verteilungen auf  $(S, d)$  als Folge von Punkten auf  $(\mathcal{M}_1(S), d_w)$ , die vom Startpunkt  $v$  und von  $\hat{i}$  abhängt; der den Kernen inhärente Zufall spielt auf  $\mathcal{M}_1(S)$  keine Rolle mehr. Außerdem zeigen wir die Existenz eines eindeutigen attraktiven invarianten Maßes  $\bar{\mu} \in \mathcal{M}_1(\mathcal{M}_1(S))$  für den Prozeß  $\bar{Z}_n^v(\hat{i})$ .

Gegen dieses Maß  $\bar{\mu}$  konvergiert schwach die empirische Verteilung des Prozesses  $\bar{Z}_n^v(\hat{i})$  für jeden Startpunkt  $v \in \mathcal{M}_1(S)$  für fast alle  $\hat{i}$ . In Kapitel 3.4 ergibt sich die uns

interessierende eindeutige attraktive invariante Startverteilung  $\mu$  für den Prozeß  $Z_n^x(\omega)$  als Intensitätsmaß von  $\bar{\mu}$ . Dadurch lassen sich einige Eigenschaften von  $\bar{Z}_n^v(\hat{i})$  übertragen auf das Geschehen auf  $(S, d)$ , die verknüpft werden können mit über ein Martingalargument erhaltenen Aussagen über den zusätzlichen, dem Kern inhärenten Zufall. So erhalten wir die Hauptaussage der Arbeit, Satz 3.4.2, über die fast sichere Konvergenz der empirischen Verteilung eines aus der zufälligen Iteration von Kernen gewonnenen Prozesses gegen das eindeutige attraktive invariante Maß für beliebigen Startpunkt.

In Kapitel 2 geben wir eine Einführung zu Systemen iterierter Funktionen mit Einblicken in die fraktale Geometrie. Das scheint uns auch im Rahmen einer wahrscheinlichkeitstheoretischen Arbeit aus historischen (sofern man bei Zeiträumen von 10 Jahren von historisch sprechen kann) und methodischen Gründen sinnvoll. Historischer Grund ist der Zugang von [BE] und [E] zur Problematik von ergodischem Verhalten für wahrscheinlichkeitstheoretische Prozesse, wie sie von einem System iterierter Funktionen beschrieben werden, eben über die fraktale Geometrie; die enorme Unterstützung der Anschauung der wahrscheinlichkeitstheoretischen Geschehnisse durch die Kenntnis fraktalgeometrischer Zusammenhänge läßt der Einführung auch methodisch eine Bedeutung zukommen.

## 1.2 Bisherige Ergebnisse

Im folgenden stellen wir die Entwicklung der mathematischen Beschäftigung mit fraktaler Geometrie und Systemen iterierter Funktionen (IFS für Iterated Function System) kurz dar.

Die mathematische Grundlage für die fraktale Geometrie legte Hutchinson 1981 ([H]) mit seinem Artikel über selbstähnliche Mengen mit nicht-ganzzahliger Hausdorffdimension. Darin betrachtet er kompakte Mengen  $A$ , die bezüglich einer endlichen Kollektion kontraktiver Transformationen  $w_i$  invariant sind, und konstatiert, daß  $A$  der Abschluß der Fixpunkte der endlichen Kombinationen  $w_{i_1} w_{i_2} \dots w_{i_k}$  von Transformationen ist.

Außerdem stellt er fest, daß für  $X \subset S$  und  $W(X) = \bigcup_{i=1}^N w_i(x)$  in der Hausdorffmetrik

$W^n(X) \rightarrow A$ . Schließlich zeigt er, daß  $A$  Träger verschiedener Maße sein kann, die von der Gewichtung der  $w_i$  durch Wahrscheinlichkeiten  $p_i$  abhängen.

Barnsley und Demko ([BD]) führen den Begriff IFS ein und bereinigen die Notation. Zusätzlich leisten sie die Identifizierung des invarianten Maßes  $\mu$  auf  $A$  über das invariante Maß auf dem Adreßraum  $\Omega$ .

Bei Diaconis und Shahshahani ([DS]) steht die computerunterstützte Bilderzeugung im Mittelpunkt. Sie betrachten affine kontraktive Transformationen  $w_i$  auf dem  $\mathbb{R}^2$  und erzeugen ein Computerbild, indem sie gemäß [H] die Fixpunkte der endlichen Kombinationen  $w_{i_1} w_{i_2} \dots w_{i_k}$  für ausreichend großes  $j$  zeichnen. Außerdem betrachten sie die Markov - Kette  $x_i = w_{i_j} x_{i-1}$  und interpretieren sie als dynamisches System, so daß sie mit dem Ergodensatz zu einer schwachen Konvergenz der empirischen Verteilung gegen  $\mu$  für fast alle Adressen  $\hat{i}$  und fast alle Startpunkte  $x$  auf dem Attraktor gelangen. Dieses Ergebnis erhalten sie mit stärkeren Bedingungen an die Transformationen auch für beliebigen Startpunkt.

Barnsley und Elton ([BE]) fordern von den verwandten Kontraktionen nicht mehr strikte Kontraktivität, sondern nurmehr Kontraktivität im Schnitt und beweisen auch für diese Voraussetzung die Existenz eines eindeutigen attraktiven invarianten Maßes, das jedoch nicht mehr einen kompakten Träger haben muß.

In [BDEG] wird von Barnsley, Demko, Elton und Geronimo diese Existenz bewiesen unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß die Wahrscheinlichkeit, mit der zum Zeitpunkt  $n$  eine Transformation ausgewählt wird, die den weiteren Verlauf der Trajektorie bestimmt, auch abhängen soll vom Aufenthaltsort zur Zeit  $n$ .

Elton schließlich zeigt in [E], daß mit den Voraussetzungen aus [BDEG] eine Konvergenz der empirischen Verteilungen gegen  $\mu$  nicht nur für fast alle Adressen  $\hat{i}$  für fast alle Startpunkte auf dem Attraktor eintritt, wie mit dem Ergodensatz aus [BDEG] gefolgert werden

kann, sondern daß diese Konvergenz für beliebigen Startpunkt eintritt, ein Ergebnis, das insbesondere für die Computersimulation mit Systemen iterierter Funktionen interessant ist.

Zur Einführung in das Thema empfiehlt sich das Buch von Barnsley ([B]), das auch unserem Kapitel 2 zugrunde liegt. Darin werden neben Systemen iterierter Funktionen auch andere fraktale Sachverhalte behandelt, so z.B. Julia - Mengen und das Mandelbrot'sche Apfelmännchen. Auch werden Betrachtungen zu fraktaler Dimension und der Verwandtschaft zur Hausdorffdimension angestellt, wodurch der Begriff „Fraktal“ erst verständlich wird.

Während sich unsere Arbeit mit der Erzeugung eines Attraktors mit gegebenen Kernen und Wahrscheinlichkeiten beschäftigt, betrachten Vrscay und Roehrig ([VR]) aufbauend auf [BD], [DS] und [BDEG] und ausgehend von den darin behandelten Momenten von invarianten Maßen das sogenannte *inverse Problem*, bei dem es darum geht, einen gegebenen Attraktor und das zugehörige Maß durch ein IFS mit Wahrscheinlichkeiten möglichst gut anzunähern. Diese nichtlineare Approximation ist interessant zur computergestützten Datenkomprimierung. Auch Graf [G] stellt 1992 die von uns verwandten Ergebnisse von [BE] und [E] kurz dar und spricht das inverse Problem an, liefert jedoch keine neuen Ergebnisse.

## 2. Einführung zu Systemen iterierter Funktionen

In dieser Einführung werden die Grundbegriffe der Theorie der Systeme iterierter Funktionen dargestellt, sowie Zusammenhänge zu dynamischen Systemen erläutert und schließlich Maße auf den zuvor konstruierten Attraktoren von Systemen iterierter Funktionen betrachtet.

Das Hauptaugenmerk liegt darauf, das inhaltliche Umfeld der vorliegenden Diplomarbeit anschaulich darzustellen, ohne daß der Anspruch erhoben wird, das Thema "Systeme iterierter Funktionen" umfassend abzuhandeln. Daher verzichten wir hier auf die Wiederholung von Beweisen, die sich sämtlich in der Literatur finden lassen.

Die Einführung basiert auf [B].

### 2.1 Systeme iterierter Funktionen

Das Ziel dieses Kapitels ist es, den Begriff "System iterierter Funktionen" einzuführen und mit Hilfe eines Fixpunktsatzes den zugehörigen Attraktor zu erhalten, der unter kontraktiven Transformationen invariant ist.

#### Definition 1

Eine Transformation  $f: S \rightarrow S$  auf einem metrischen Raum  $(S, d)$  heißt *kontraktiv* oder *Kontraktionsabbildung*, wenn es eine Konstante  $0 \leq s < 1$  gibt, so daß

$$d(f(x), f(y)) \leq s \cdot d(x, y) \quad \forall x, y \in S.$$

Jede solche Zahl  $s$  heißt *Kontraktivitätsfaktor* für  $f$ .

#### Definition 2

Sei  $(S, d)$  ein vollständiger metrischer Raum. Wir bezeichnen mit  $\mathcal{H}(S)$  den Raum, dessen Punkte die nichtleeren kompakten Teilmengen von  $S$  sind.

Sei  $x \in S, B \in \mathcal{H}(S)$ . Wir definieren  $d'(x, B) := \min \{ d(x, y) : y \in B \}$  als den *Abstand vom Punkt  $x$  zur Menge  $B$* .

Seien  $A, B \in \mathcal{H}(S)$ . Wir definieren  $d''(A, B) := \max \{ d'(x, B) : x \in A \}$  als den *Abstand von der Menge  $A$  zur Menge  $B$* .

Wir definieren den *Hausdorff-Abstand* zwischen Punkten  $A$  und  $B$  in  $\mathcal{H}(S)$  durch

$$h(A, B) := \min \{ d''(A, B), d''(B, A) \}.$$

**Bemerkung 1**

Im allgemeinen ist  $d''(A, B) \neq d''(B, A)$ ,  $d''$  ist also keine Metrik.  $(\mathcal{H}(S), h)$  ist vollständig,  $h$  ist eine Metrik auf  $\mathcal{H}(S)$  und hängt ab von  $d$  auf  $S$ .

**Satz 1 (Fixpunktsatz)**

Sei  $f: S \rightarrow S$  eine Kontraktionsabbildung auf einem vollständigen metrischen Raum  $(S, d)$ . Dann besitzt  $f$  genau einen Fixpunkt  $x_f \in S$ , darüberhinaus konvergiert für jeden Punkt

$x \in S$  die Folge  $\{f^n(x) : n = 0, 1, 2, \dots\}$  gegen  $x_f$ , d.h.  $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = x_f \quad \forall x \in S$ .

**Lemma 1**

Sei  $w: S \rightarrow S$  eine Kontraktionsabbildung auf dem metrischen Raum  $(S, d)$  mit Kontraktionsfaktor  $s$ . Dann ist  $w: \mathcal{H}(S) \rightarrow \mathcal{H}(S)$  definiert durch

$$w(B) := \{w(x) : x \in B\} \quad \forall B \in \mathcal{H}(S)$$

eine Kontraktionsabbildung auf  $(\mathcal{H}(S), h(d))$  mit Kontraktionsfaktor  $s$ .

**Lemma 2**

Sei  $(S, d)$  metrischer Raum. Seien  $\{w_i : i = 1, 2, \dots, N\}$  Kontraktionsabbildungen auf  $(\mathcal{H}(S), h(d))$ . Sei  $s_i$  Kontraktionsfaktor für  $w_i$  für jedes  $i$ .

Wir definieren  $W: \mathcal{H}(S) \rightarrow \mathcal{H}(S)$  durch

$$W(B) := w_1(B) \cup w_2(B) \cup \dots \cup w_N(B) = \bigcup_{i=1}^N w_i(B) \quad \forall B \in \mathcal{H}(S).$$

Dann ist  $W$  eine Kontraktionsabbildung mit Kontraktionsfaktor  $s = \max \{s_i : i = 1, 2, \dots, N\}$ .

**Definition 3**

Ein *System iterierter Funktionen* (IFS für iterated function system) besteht aus einem vollständigen metrischen Raum  $(S, d)$  mit einer endlichen Menge von Kontraktionsabbildungen  $w_i$  mit zugehörigen Kontraktionsfaktoren  $s_i$  für  $n = 1, 2, \dots, N$ , die Notation für das IFS ist  $\{S; w_1, w_2, \dots, w_N\}$ . Der Kontraktionsfaktor des Systems ist  $s = \max \{s_i : i = 1, 2, \dots, N\}$ .



**Satz 2**

Sei  $\{S; w_1, w_2, \dots, w_N\}$  ein IFS mit Kontraktionsfaktor  $s$ . Dann ist die Transformation

$W: \mathcal{H}(S) \rightarrow \mathcal{H}(S)$  definiert durch

$$W(B) = \bigcup_{i=1}^N w_i(B) \quad \forall B \in \mathcal{H}(S).$$

eine Kontraktionsabbildung auf dem vollständigen metrischen Raum  $(\mathcal{H}(S), h(d))$  mit Kontraktionsfaktor  $s$ , das heißt  $h(W(B), W(C)) \leq s \cdot h(B, C) \quad \forall B, C \in \mathcal{H}(S)$ .

Für den eindeutigen Fixpunkt  $A \in \mathcal{H}(S)$  gilt

$$A = W(A) = \bigcup_{i=1}^N w_i(A).$$

Er ist gegeben durch  $A = \lim_{n \rightarrow \infty} W^n(B)$  für jedes  $B \in \mathcal{H}(S)$ .

**Definition 4**

Die Iteration der Transformation  $W$  aus Satz 2 heißt *deterministischer Algorithmus* zur Berechnung von  $A$ .

$A$  heißt der *Attraktor* des IFS.

**Bemerkung 2**

Der Attraktor eines IFS ist in der Regel ein Fraktal, d.h. er hat eine nicht-ganzzahlige Hausdorff - Dimension (siehe 2.4).

**Bemerkung 3**

Zur Veranschaulichung von Satz 2 kann als vollständiger metrischer Raum  $\mathbb{R}^2$  mit der euklidischen Metrik dienen. Eine Kontraktion  $w_i$  hat dort die Form  $w_i x = A_i x + c_i$ , wobei  $A_i$  eine kontraktive  $2 \times 2$  - Matrix ist, für die also  $|A_i x| < |x| \quad \forall x \neq 0$  gilt,  $x \in \mathbb{R}^2$ ,  $c_i \in \mathbb{R}^2$ .

Sie bewirkt im  $\mathbb{R}^2$  die Verringerung des Abstandes zwischen transformierten Punkten gegenüber dem Abstand der ursprünglichen Punkte, während sie in  $\mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$  eine kompakte Teilmenge des  $\mathbb{R}^2$  in eine "kleinere" überführt. Durch Kombination kontraktiver Abbildungen und anschließende Iteration erhält man mit Satz 2 eine bezüglich der Kombination der Abbildungen invariante Menge, die durch das IFS eindeutig bestimmt und unabhängig von der Startmenge der Iteration ist.

## Beispiel 1

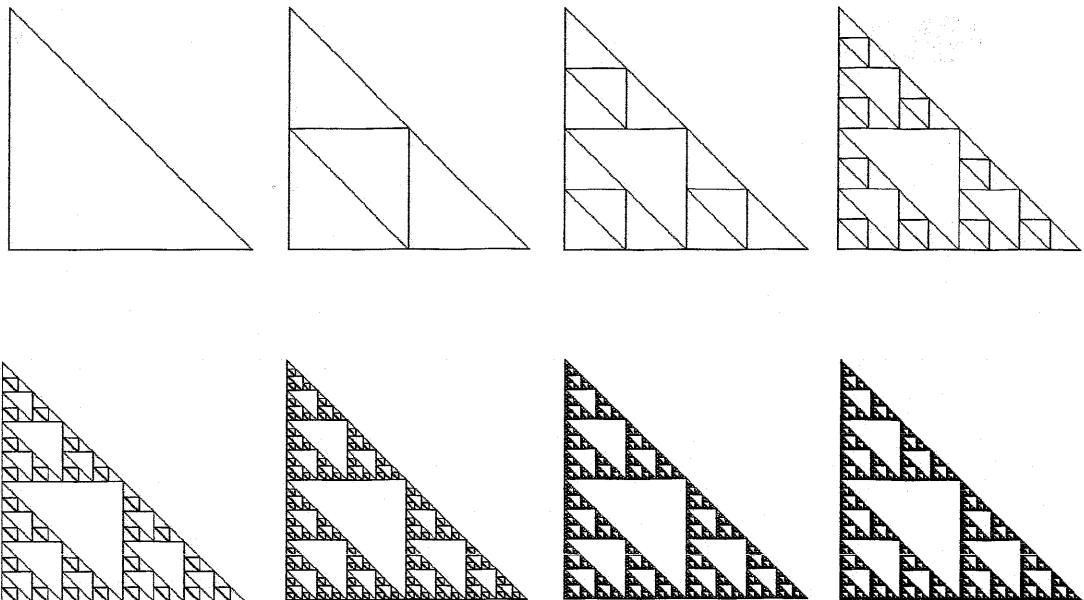
Ein *Sierpinski - Dreieck* im  $\mathbb{R}^2$  wird gegeben durch die Transformationen

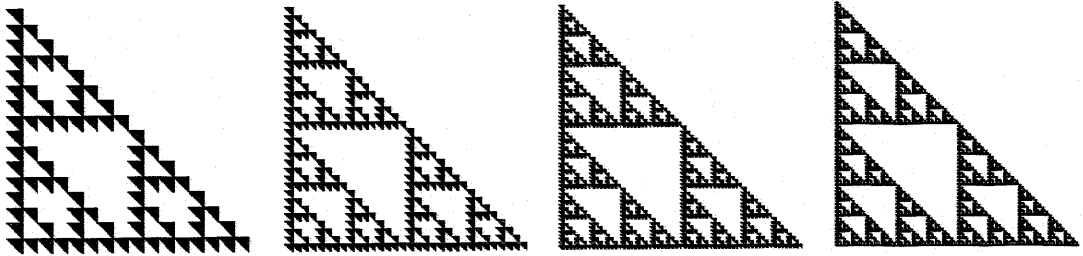
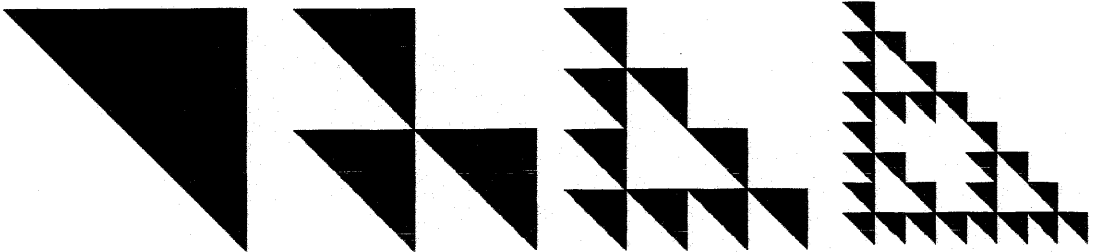
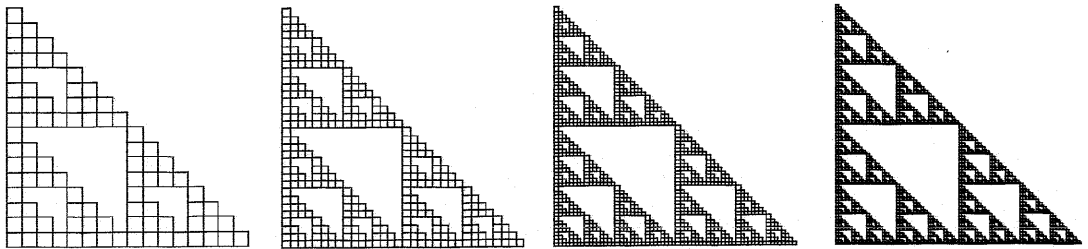
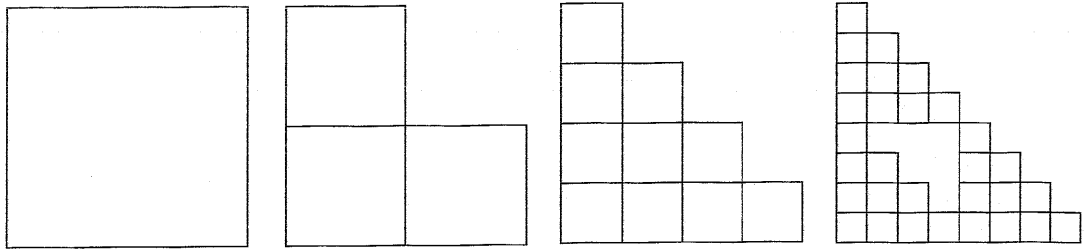
$$w_1\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right) = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$w_2\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right) = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$w_3\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right) = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die drei Transformationen bewirken jeweils eine Stauchung und eine Verschiebung der Ausgangsmenge. Durch Iteration von  $W(B) = \bigcup_{i=1}^N w_i(B)$  ergibt sich ein Sierpinski - Dreieck gemäß Satz 2 unabhängig von der Startmenge. Gezeigt sind die ersten acht Iterierten für drei verschiedene Startmengen. Schon nach wenigen Schritten der Iteration läßt sich eine Konvergenz zum Attraktor Sierpinski - Dreieck erkennen.





## 2.2 Dynamische Systeme und IFS

In diesem Kapitel wird das Konzept von Adressen von Punkten auf dem Attraktor eines Systems iterierter Funktionen eingeführt. Mit Hilfe der Adressen läßt sich dem IFS ein dynamisches System mit verwandten Eigenschaften zuordnen. Dazu konstruieren wir eine stetige Transformation vom zum IFS gehörigen Adreßraum auf den Attraktor des IFS.

### Definition 1

Sei  $\{S; w_1, w_2, \dots, w_N\}$  ein IFS. Der zum IFS gehörige Adreßraum  $(\Omega, d_c)$  sei definiert

durch  $\Omega = N^N = \{\hat{i} = (i_1, i_2, \dots) : 1 \leq i_k \leq N \forall k\}$  und

$$d_c(\hat{i}, \hat{i}') = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|i_n - i'_n|}{(N+1)^n} \quad \forall \hat{i}, \hat{i}' \in \Omega.$$

### Satz 1

Sei  $(S, d)$  ein vollständiger metrischer Raum. Sei  $\{S; w_1, w_2, \dots, w_N\}$  ein IFS mit Attraktor

A. Sei  $(\Omega, d_c)$  der zum IFS gehörige Adreßraum. Für jedes  $\hat{i} \in \Omega$ ,  $n \in \mathbb{N}$  und  $x \in S$  sei

$$Y_n^x(\hat{i}) = w_{i_1} \circ w_{i_2} \circ \dots \circ w_{i_n}(x).$$

Dann existiert

$$\phi(\hat{i}) = \lim_{n \rightarrow \infty} Y_n^x(\hat{i}),$$

gehört zu A und ist unabhängig von  $x \in S$ .

Wenn K kompakte Teilmenge von S ist, dann ist die Konvergenz gleichmäßig über  $x \in K$ . Die Funktion  $\phi: \Omega \rightarrow A$  ist dann stetig und surjektiv.

### Bemerkung 1

In [H] wird die Existenz des Attraktors zunächst nur mit den Mitteln von Satz 1 bewiesen und der Attraktor definiert als die Vereinigung der  $\phi(\hat{i})$ .

Im folgenden schreiben wir auch  $w_i x$  für  $w_i(x)$  und  $w_i \dots w_j x$  für  $w_i \circ \dots \circ w_j(x)$ .

## Definition 2

Sei  $\{ S; w_1, w_2, \dots, w_N \}$  ein IFS mit zugehörigem Adreßraum  $\Omega$ . Sei  $\phi: \Omega \rightarrow A$  die stetige Funktion aus dem Adreßraum auf den Attraktor aus Satz 1. Eine *Adresse* eines Punktes  $a \in A$  ist jedes Element der Menge  $\phi^{-1}(a) = \{ \hat{i} \in \Omega : \phi(\hat{i}) = a \}$ .

Diese Menge heißt *Menge der Adressen* von  $a \in A$ . Das IFS heißt *total unzusammenhängend*, wenn jeder Punkt des Attraktors genau eine Adresse hat. Das IFS heißt *berührend*, wenn es nicht total unzusammenhängend ist, aber der Attraktor eine nichtleere Menge  $M$  enthält, die offen in  $A$  ist, so daß

$$i) \quad w_i(M) \cap w_j(M) = \emptyset \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, N\} \text{ mit } i \neq j,$$

$$ii) \quad \bigcup_{i=1}^N w_i(M) \subset M.$$

Das IFS heißt *überlappend*, wenn es weder total unzusammenhängend noch berührend ist.

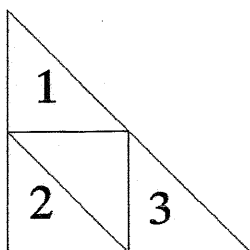
## Bemerkung 2

Dieses Konzept ermöglicht es, Punkte auf dem Attraktor über ihre Adressen zu identifizieren und Aussagen über den Attraktor zurückzuführen auf leichter zu treffende Aussagen über den Adreßraum.

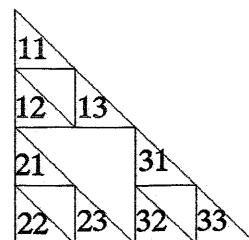
Mit Satz 1 ergibt sich, daß eine Trajektorie  $Y_n^X(\hat{i})$  konvergiert, was dadurch anschaulich wird, daß zum Zeitpunkt  $n$  die ersten  $n$  Ziffern der Adresse  $\hat{i}$  des zugehörigen Punktes bekannt sind, dieser also auf dem Attraktor mit fortschreitender Zeit immer besser lokalisierbar ist.

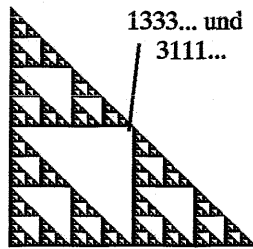
## Beispiel 1

Mit den Transformationen für das Sierpinski - Dreieck aus Beispiel 2.1.1. lassen sich einzelnen Punkten auf dem Dreieck Adressen zuordnen und ganzen Bereichen auf dem Dreieck die ersten Ziffern der Adressen ihrer Punkte.

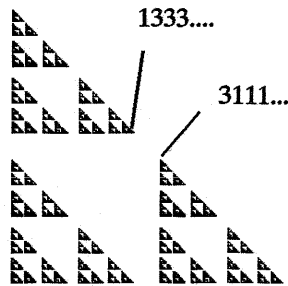


Rechts und links sind die ersten Ziffern der Punkte in den Teildreiecken angegeben. Die Transformationen sind gewählt wie in Beispiel 2.1.1.

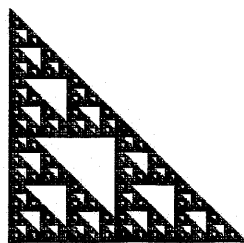




Dieses Sierpinski - Dreieck mit den Transformationen aus Beispiel 2.1.1 ist berührend, da nicht alle Punkte eine eindeutige Adresse haben, aber der Attraktor ohne die drei Eckpunkte die Bedingungen für eine offene Menge aus Definition 2 erfüllt.



Dieses Sierpinski - Dreieck ist total unzusammenhängend. Es gehört zu drei Transformationen, die denen aus Beispiel 2.1.1 gleichen, außer daß auf der Hauptdiagonalen der Transformationsmatrizen jeweils der Stauchungsfaktor 0.45 statt 0.5 steht.



Dieses Sierpinski - Dreieck ist überlappend: auf der Hauptdiagonalen der Transformationsmatrizen steht jeweils 0.55 statt 0.5

### Definition 3

Sei  $A$  der Attraktor eines IFS  $\{S; w_1, w_2, \dots, w_N\}$ . Ein Punkt  $a \in A$  heißt *periodischer Punkt*

des IFS, wenn es eine endliche Folge von Zahlen  $(\hat{i}(n) \in \{1, 2, \dots, N\})_{n=1}^M$  gibt, so daß

$$a = w_{\hat{i}(M)} \circ w_{\hat{i}(M-1)} \circ \dots \circ w_{\hat{i}(1)}(a) \text{ ist.} \quad (*)$$

Wenn  $a \in A$  periodisch ist, heißt die kleinste Zahl  $M$ , für die (\*) gilt, die *minimale Periodenlänge* von  $a$ , jede andere einfach *Periodenlänge* von  $a$ .

### Bemerkung 3

Sei  $a \in A$  periodischer Punkt,  $\hat{i}$  der Punkt im zugehörigen Adreßraum, der definiert ist durch  $\hat{i} = \hat{i}(M) \hat{i}(M-1) \dots \hat{i}(1) \hat{i}(M) \dots = \overline{\hat{i}(M) \hat{i}(M-1) \dots \hat{i}(1)}$ .

Dann ist  $\phi(\hat{i}) = \lim_{n \rightarrow \infty} Y_n^x(\hat{i}) = a$ .

### Definition 4

Ein Punkt  $\hat{a}$  im Adreßraum, dessen zugehöriger Punkt  $a$  auf dem Attraktor periodisch ist, heißt *periodische Adresse*. Sind  $a$  und  $\hat{a}$  periodisch nach einer endlichen Anfangsmenge, heißen sie *schließlich periodisch*.

### Satz 2

Der Attraktor eines IFS ist der Abschluß der periodischen Punkte des IFS.

### Bemerkung 4

[DS] verwenden Satz 2 zur Erzeugung eines Computerbildes eines Attraktors von  $N$  Transformationen im  $\mathbb{R}^2$ . Sie nähern den Attraktor an durch die Berechnung aller  $N^k$  periodischen Punkte mit minimaler Periodenlänge  $k$  bis zu einem ausreichend großen  $k$ . Ein periodischer Punkt mit minimaler Periodenlänge 1 ist dabei ein Fixpunkt der Transformation  $w_i$ . Für ihn gilt  $w_i x = x$ , d.h.  $A_i x + c_i = x$ , also

$$x = (E_2 - A_i)^{-1} \cdot c_i \text{ mit } E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Für  $k = 2$  werden alle  $N^2$  Fixpunkte von  $w_i w_j$ ,  $i, j \in \{1, 2, \dots, N\}$  ausgerechnet usw..

### Definition 5

Ein *dynamisches System* ist eine Transformation  $f: S \rightarrow S$  auf einem metrischen Raum  $(S, d)$  und wird bezeichnet mit  $\{S; f\}$ . Der *Orbit* eines Punktes  $x \in S$  ist die Folge  $(f^n(x))_{n=0}^{\infty}$ .

### Definition 6

Sei  $\{S; f\}$  ein dynamisches System. Ein *periodischer Punkt* von  $f$  ist ein Punkt  $x \in S$ , für den  $f^n(x) = x$  für ein  $n \in \mathbb{N}$ . Das kleinste  $n$  mit  $f^n(x) = x$  heißt dann *minimale Periodenlänge* von  $x$ . Der Orbit eines periodischen Punktes von  $f$  heißt *Zyklus* von  $f$ .

Die *minimale Periodenlänge* eines Zyklus von  $f$  ist die Zahl der verschiedenen Punkte, die er enthält.

**Lemma 1**

Sei  $\{S; w_1, w_2, \dots, w_N\}$  ein IFS mit Attraktor  $A$ . Wenn das IFS total unzusammenhängend ist, dann ist für jedes  $i \in \{1, 2, \dots, N\}$  die Transformation  $w_i: A \rightarrow A$  injektiv.

**Definition 7**

Sei  $\{S; w_1, w_2, \dots, w_N\}$  ein total unzusammenhängendes IFS mit Attraktor  $A$ . Die zugehörige *Shift-Transformation* auf  $A$  ist die Transformation  $R: A \rightarrow A$  definiert durch  $R(a) = w_i^{-1}(a)$  für  $a \in w_i(A)$ , wobei  $w_i$  als Transformation auf  $A$  angesehen wird. Das dynamische System  $\{A; R\}$  heißt das zum IFS gehörige *Shift-dynamische-System*.

**Lemma 2**

Sei  $\{S; w_1, w_2, \dots, w_N\}$  ein total unzusammenhängendes IFS,  $\{A; R\}$  das zugehörige Shift-dynamische-System, und  $T: \Omega \rightarrow \Omega$  sei definiert durch

$$T((i_1, i_2, \dots)) = (i_2, i_3, \dots) \text{ für alle } \hat{i} = (i_1, i_2, \dots) \in \Omega.$$

Dann sind die zwei dynamischen Systeme *äquivalent* oder *topologisch konjugiert* d.h., es gibt einen Homomorphismus  $\psi: A \rightarrow \Omega$ , so daß

$$R(x) = \psi^{-1} \cdot T \cdot \psi(x) \quad \forall x \in A \text{ und } T(\hat{i}) = \psi \cdot R \cdot \psi^{-1}(\hat{i}) \quad \forall \hat{i} \in \Omega$$

ist.

Der Homomorphismus ist gegeben durch  $\phi: \Omega \rightarrow A$  aus Satz 1.

**Bemerkung 5**

Die Äquivalenz der beiden Systeme kann benutzt werden, um mit Hilfe des Systems  $\{T, \Omega\}$  Aussagen über das System  $\{A, R\}$  zu machen. So haben beide Systeme z.B. die gleiche Anzahl von Zyklen mit Periodenlänge  $n \in \mathbb{N}$ .

**Bemerkung 6**

Man kann die Eigenschaften eines total unzusammenhängenden IFS erweitern auf berührende und überlappende Systeme iterierter Funktionen, deren Attraktor als Projektion eines Attraktors eines total unzusammenhängenden IFS höherer Dimension angesehen wird.



**Bemerkung 7**

Sei  $\{S; w_1, w_2, \dots, w_N\}$  ein IFS mit Kontraktionsfaktor  $s < 1$ . Die bei der numerischen Berechnung des Orbit des zugehörigen Shift - dynamischen - Systems auftauchenden Fehler führen dazu, daß bei vorgegebenem Startpunkt  $x_0 \in A$  der Abstand des tatsächlichen Orbits vom berechneten Orbit schließlich nur durch den Durchmesser des Attraktors  $A$  beschränkt wird. Es läßt sich jedoch zeigen, daß es zu jedem numerischen Orbit

$$\{x'_n\}_{n=0}^{\infty} \text{ mit } d(x'_{n+1}, R(x'_n)) \leq \theta \leq \text{diam}(A)$$

einen exakten Orbit

$$\{x_n = R^n(x_0)\}_{n=0}^{\infty} \text{ gibt, so daß } d(x'_{n+1}, x_{n+1}) \leq \frac{s \cdot \theta}{(1-s)} \text{ für alle } n = 1, 2, \dots$$

gilt.

**Definition 8**

Sei  $(S, d)$  metrischer Raum. Eine Teilmenge  $B \subset S$  heißt *dicht* in  $S$ , wenn der Abschluß von  $B$  ungleich  $S$  ist. Eine Folge  $(x_n)_{n=0}^{\infty}$  von Punkten in  $S$  heißt *dicht* in  $S$ , falls es für jeden Punkt  $a \in S$  eine Teilfolge  $(x_{i_n})_{n=0}^{\infty}$  gibt, die gegen  $a$  konvergiert. Insbesondere heißt ein Orbit  $(x_n)_{n=0}^{\infty}$  eines dynamischen Systems  $\{S, f\}$  *dicht* in  $S$ , wenn die Folge  $(x_n)_{n=0}^{\infty}$  *dicht* in  $S$  ist.

Ein dynamisches System  $\{S; f\}$  heißt *transitiv*, wenn es für je zwei Teilmengen  $U$  und  $V$  des metrischen Raums  $(S, d)$  eine endliche Zahl  $n$  gibt, so daß  $U \cap f^n(V) \neq \emptyset$ .

Es heißt *empfindlich gegen Anfangsbedingungen*, wenn ein  $\delta > 0$  existiert, so daß es für jedes  $x \in S$  und jede Kugel  $B(x, \varepsilon)$  mit Radius  $\varepsilon > 0$  ein  $y \in B(x, \varepsilon)$  und eine Zahl  $n \geq 0$  gibt mit  $d(f^n(x), f^n(y)) > \delta$ .

### Definition 9

Ein dynamisches System  $\{S; f\}$  heißt *chaotisch*, falls

- i) es transitiv ist,
- ii) es empfindlich gegen Anfangsbedingungen ist,
- iii) die Menge der periodischen Orbits von  $f$  dicht in  $S$  ist.

### Satz 3

Das zu einem total unzusammenhängenden IFS gehörende Shift-dynamische-System von mindestens zwei Transformationen ist chaotisch.

### Bemerkung 8

Falls  $\mathcal{N}(L)$  die Anzahl verschiedener Zyklen der Periodenlänge  $L$  bezeichnet, ist z.B. für ein IFS mit zwei Transformationen  $\mathcal{N}(1) = 2$ ,  $\mathcal{N}(2) = 1$ ,  $\mathcal{N}(4) = 3$ ,  $\mathcal{N}(5) = 6$ ,  $\mathcal{N}(10) = 99$ ,  $\mathcal{N}(20) = 52377$ . Da die Menge der periodischen Zyklen dicht im Attraktor eines IFS ist, kann man ihn durch die Menge aller Zyklen einer endlichen Periodenlänge  $L$  annähern. Für  $L = 10000$  und zwei Transformationen besteht eine solche Näherung aus  $2^{10000}$  Punkten, von denen jeder mit großer Wahrscheinlichkeit auf einem Zyklus mit minimaler Periodenlänge  $L$  liegt, d.h., daß mit Satz 3 der Orbit eines solchen Punktes den Attraktor schon approximiert.

### Bemerkung 9

Damit ist ein erster Zugang zu Fragen im Zusammenhang mit den uns besonders interessierenden zufälligen Iterationen bei Systemen iterierter Funktionen möglich. Dabei soll zunächst ausgehend von einem Startpunkt  $x$  auf dem Attraktor in jedem Schritt eine der Transformationen  $w_1, w_2, \dots, w_N$  zufällig und zunächst mit gleicher Wahrscheinlichkeit ausgewählt und so mit der Iterationsregel  $x_i = w_i x_{i-1}$  eine Trajektorie

$$x, w_{i_1} x, w_{i_2} w_{i_1} x, w_{i_3} w_{i_2} w_{i_1} x \dots$$

im vollständigen metrischen Raum  $S$  erzeugt werden. So erhalten wir einen zeitlich diskreten Markov - Prozeß  $Z_n^x(i)$  (vgl 3.1.2), der bestimmt wird durch den Startpunkt  $x \in S$  und die von den Wahrscheinlichkeiten  $p_i$  abhängige Übergangswahrscheinlichkeit  $K$  von einem Punkt  $y \in S$  in die Borelmenge  $B$  mit

$$K(y, B) = \sum_{i=1}^N p_i \delta_{w_i y}(B).$$

Auf der Untersuchung des asymptotischen Verhaltens eines solchen Prozesses liegt unser Hauptaugenmerk.

Die Adressen der Punkte auf dem Attraktor hängen ab von den zufällig gewählten Transformationen. Sei  $\hat{i} = (i_1, i_2, \dots)$  die Adresse von  $x$ , also  $x = \phi(\hat{i})$  mit dem  $\phi$  aus Satz 1, die Anzahl der Transformationen sei  $N = 3$ , und sei 1322321132...21 eine zufällige Folge der Länge  $10^6$ . Dann ist

$$w_1 x = \phi((1, \hat{i})) := \phi((1, i_1, i_1, \dots))$$

$$w_3 w_1 x = \phi((3, 1, \hat{i}))$$

$$w_2 w_3 w_1 x = \phi((2, 3, 1, \hat{i}))$$

$$w_2 w_2 w_3 w_1 x = \phi((2, 2, 3, 1, \hat{i}))$$

$$w_3 w_2 w_2 w_3 w_1 x = \phi((3, 2, 2, 3, 1, \hat{i}))$$

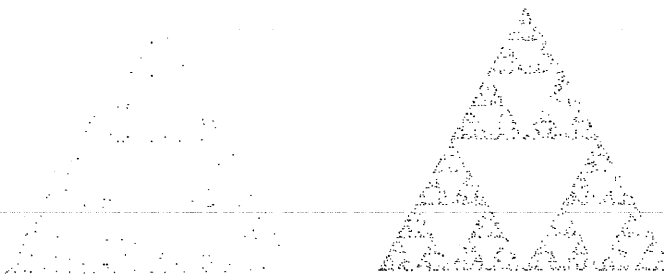
.....

$$w_2 w_1 \dots w_3 w_2 w_2 w_3 w_1 x = \phi((2, 1, \dots, 3, 2, 2, 3, 1, \hat{i}))$$

der Beginn einer Folge von Punkten auf dem Attraktor bei gegebenem Startpunkt  $x = \phi(\hat{i})$ , d.h. der Beginn von  $Z_n^x(2, 1, \dots, 3, 2, 2, 3, 1, \hat{i})$  und, in umgekehrter Reihenfolge, also von unten nach oben betrachtet, ein Ausschnitt aus dem Orbit des Shift - dynamischen - Systems  $\{A; R\}$ , nämlich  $\{R^n(\phi((2, 1, \dots, 3, 2, 2, 3, 1, \hat{i})))\}_{n=0}^{1000000}$ . Von diesem Orbit und also von der Trajektorie nach zufälligen Iterationen erwarten wir Dichte im Attraktor. Das legt die Vermutung nahe, daß man mit dieser Trajektorie tatsächlich den Attraktor annähern kann. Genauere mathematische Betrachtungen dazu folgen nach der Einführung.

### Beispiel 2

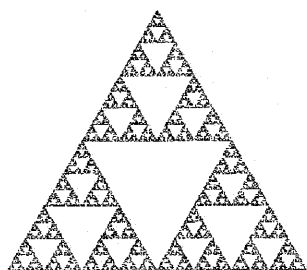
Abgebildet sind für  $n=1, 2, 3, 4, 5$  die ersten  $10^n$  Punkte auf einer Trajektorie, die wie in Bemerkung 9 zustande kommt. Die Transformationen werden jeweils mit Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{3}$  ausgewählt, Startpunkt der Trajektorie ist der Punkt  $(0,0)$ . Offenbar approximiert die Trajektorie den Attraktor des zu den drei Transformationen gehörigen IFS, ein Sierpinski - Dreieck ( $w_1$  ist verschoben gegenüber  $w_1$  aus Beispiel 2.1.1.).



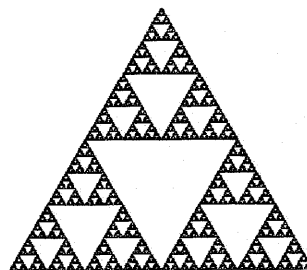
10 Punkte

100 Punkte

1000 Punkte



10000 Punkte



100000 Punkte

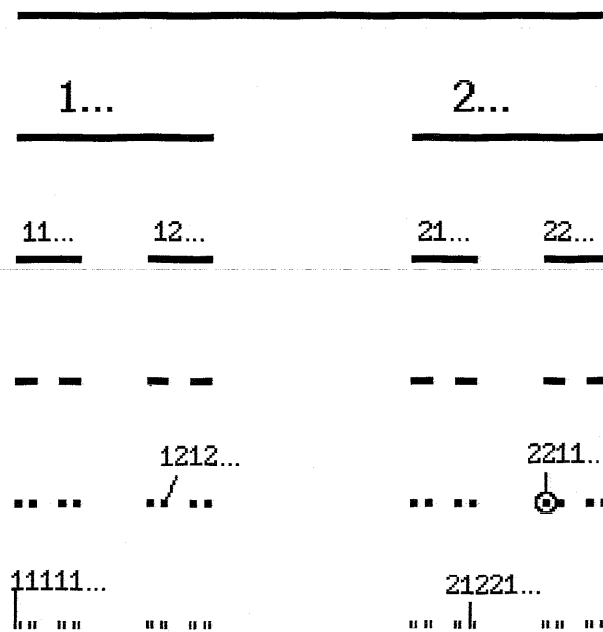
### Beispiel 3

Die Cantormenge läßt sich auffassen als Attraktor im  $\mathbb{R}$  der zwei mit  $s_{1,2} = \frac{1}{3}$  kontraktiven Transformationen

$$w_1(x) = \frac{1}{3}x,$$

$$w_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}.$$

In der Grafik sichtbar sind die ersten 6 Schritte des deterministischen Algorithmus aus Definition 2.1.4., wobei die Startmenge das Intervall  $[0,1]$  ist. In jedem Schritt teilt sich die bis dahin berechnete Menge gemäß der Transformationen in zwei gleich große Teile, wobei sich wie in Beispiel eins die Adressierung der Teile nach der angewandten Transformation richtet und in jedem Schritt mehr der führenden Stellen der Adresse bekannt werden (siehe Bemerkung 2).



Die Adresse eines Punktes auf der Trajektorie von  $Z_n^X(i)$  ist die Adresse des vorhergehenden Punktes um eine Position nach rechts geschiftet und versehen mit der Nummer  $i$  ( $1 \leq i \leq N$ ) der letzten Transformation an erster Stelle. Der Punkt 0 ist Fixpunkt von  $w_1$  und hat daher die Adresse  $(1, 1, 1, \dots) = \hat{i}_0$ . Ein Prozeß  $Z_n^X(i)$  wie in Bemerkung 9 könnte auf der Cantormenge also durch eine Folge von Adressen  $(2, \hat{i}_0), (2, 2, \hat{i}_0), (1, 2, 2, \hat{i}_0), (1, 1, 2, 2, \hat{i}_0)$  usw. repräsentiert sein, die in der Regel, ebenso wie  $Z_n^X(i)$ , nicht konvergiert. Der Punkt zur Zeit  $n$  der Trajektorie  $Y_n^X(i)$  aus Satz 1 hat an den ersten  $n-1$  Stellen der Adresse die gleichen Ziffern wie der Punkt zur Zeit  $n-1$ , an  $n$ -ter Stelle die Nummer der letzten Transformation, so daß eine Folge von Adressen von Punkten auf der Trajektorie von  $Y_n^X(i)$  auf der Cantormenge  $(2, \hat{i}_0), (2, 2, \hat{i}_0), (2, 2, 1, \hat{i}_0), (2, 2, 1, 1, \hat{i}_0)$  usw. sein könnte. Das veranschaulicht die Konvergenz von  $Y_n^X(i)$  gegen einen Punkt aus dem umkreisten Bereich oben, die in Satz 1 beschrieben wird.

Die Ähnlichkeit von  $Y_n^X(i)$  und  $Z_n^X(i)$ , insbesondere die gleiche Verteilung endlicher Adreßanfänge, wird im weiteren Verlauf noch verwandt, um die Existenz einer eindeutigen attraktiven invarianten Startverteilung für  $Z_n^X(i)$  zu zeigen.

## 2.3 Maße auf Attraktoren

In diesem Kapitel wird gezeigt, daß der Attraktor eines IFS als Träger eines Maßes angesehen werden kann, das von den Parametern des IFS abhängt.

### Definition 1

Ein IFS mit *Wahrscheinlichkeiten* besteht aus einem IFS  $\{ S; w_1, w_2, \dots, w_N \}$  zusammen mit einer Menge von Zahlen  $\{ p_1, p_2, \dots, p_N \}$ , so daß

$$\sum_{i=1}^N p_i = 1 \text{ und } p_i > 0 \text{ für } i = 1, 2, \dots, N.$$

Die Wahrscheinlichkeit  $p_i$  ist der Transformation  $w_i$  zugeordnet.

### Definition 2

Sei  $(S, d)$  ein kompakter metrischer Raum,  $\mathcal{M}_1(S)$  sei die Menge der Wahrscheinlichkeitsmaße auf  $S$ . Die *Hutchinson -Metrik*  $d_H$  auf  $\mathcal{M}_1(S)$  wird definiert durch

$$d_H(\lambda, \nu) = \sup \left\{ \int_S f \, d\lambda - \int_S f \, d\nu : f: S \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ stetig, } |f(x) - f(y)| \leq d(x, y) \quad \forall x, y \right\}$$

$\forall \lambda, \nu \in \mathcal{M}_1(S)$  (vgl. [B], S. 355).

### Bemerkung 1

Wenn  $(S, d)$  kompakter metrischer Raum ist, so ist auch  $(\mathcal{M}_1(S), d_H)$  kompakter metrischer Raum.

### Definition 3

Sei  $(S, d)$  kompakter metrischer Raum. Der zum IFS mit Wahrscheinlichkeiten  $\{ S; w_1, w_2, \dots, w_N; p_1, p_2, \dots, p_N \}$  gehörige *Markov - Operator* ist die Funktion  $M: \mathcal{M}_1(S) \rightarrow \mathcal{M}_1(S)$  definiert durch

$$M(\nu) = p_1 \nu \circ w_1^{-1} + p_2 \nu \circ w_2^{-1} + \dots + p_N \nu \circ w_N^{-1} \text{ für alle } \nu \in \mathcal{M}_1(S).$$

**Satz 1**

Sei  $(S, d)$  kompakter metrischer Raum, sei  $s \in (0, 1)$  ein Kontraktionsfaktor für das IFS mit Wahrscheinlichkeiten  $\{ S; w_1, w_2, \dots, w_N; p_1, p_2, \dots, p_N \}$ , und sei  $M$  der zugehörige Markov - Operator.

Dann ist  $M$  eine Kontraktionsabbildung bezüglich der Hutchinson - Metrik auf  $\mathcal{M}_1(S)$  mit Kontraktionsfaktor  $s$ , d.h.

$$d_H(M(\nu), M(\mu)) \leq s \cdot d_H(\nu, \mu) \quad \forall \nu, \mu \in \mathcal{M}_1(S).$$

Insbesondere gibt es mit Satz 2.1.1 ein eindeutiges Maß  $\mu \in \mathcal{M}_1(S)$  mit  $M(\mu) = \mu$ .

**Definition 4**

$\mu$  heißt das *invariante Maß* des IFS mit Wahrscheinlichkeiten.

**Bemerkung 2**

Der Attraktor des IFS ist der Träger des invarianten Maßes. Der Markov - Operator leistet eine Annäherung an das invariante Maß, indem er gleichzeitig die Träger der Maße  $M^n(\nu)$  zum Attraktor konvergieren läßt und die Verteilung auf dem Träger gemäß den Wahrscheinlichkeiten der Transformationen verfeinert.

**Beispiel 1**

Abgebildet sind die ersten Schritte der Verfeinerung des Maßes mit Hilfe des Markov - Operators im  $\mathbb{R}^2$ . Zum Start sei  $\nu$  die Gleichverteilung auf dem Attraktor der vier Transformationen, dem Quadrat  $(0,0)$ ,  $(2,0)$ ,  $(0,2)$ ,  $(2,2)$ .

$$w_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$w_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

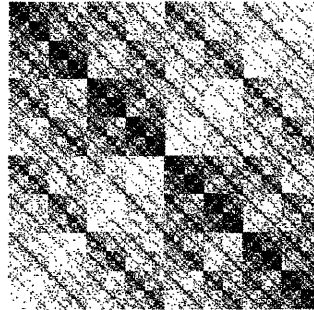
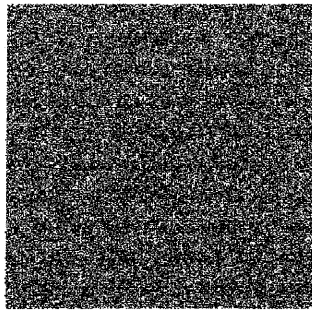
$$w_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$w_4 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$p_1$	$p_4$
$p_2$	$p_3$

$p_1^2$	$p_1 p_4$	$p_4 p_1$	$p_4^2$
$p_1 p_2$	$p_1 p_3$	$p_4 p_2$	$p_4 p_3$
$p_2 p_1$	$p_2 p_4$	$p_3 p_1$	$p_3 p_4$
$p_2^2$	$p_2 p_3$	$p_3 p_2$	$p_3^2$

Mit dem Markov - Operator verfeinert sich das Maß und konvergiert gegen das invariante Maß auf dem Attraktor.



Im linken Bild ist  $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = 0,25$ , im rechten ist  $p_1 = p_4 = 0,4$  und  $p_2 = p_3 = 0,1$ .

### Bemerkung 3

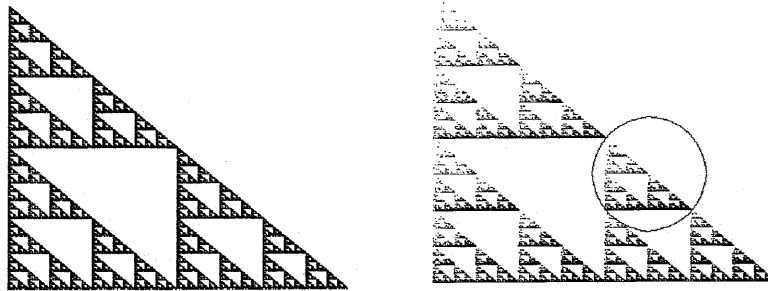
Die Verwendung von Wahrscheinlichkeiten bei einem IFS hat bei der Annäherung eines Attraktors mit der Hilfe zufälliger Iterationen wie in Bemerkung 2.2.9 zur Folge, daß in jedem Schritt eine Transformation mit der ihr zugeordneten Wahrscheinlichkeit ausgewählt wird.

Dabei approximiert der Prozeß  $Z_n^X(i)$  nicht nur den Attraktor, sondern auch das invariante Maß in der Weise, daß die relative Aufenthaltszeit der Trajektorie in einer Borelmenge  $B$  asymptotisch gegen das invariante Maß von  $B$  konvergiert.



## Beispiel 2

Dargestellt sind zwei durch zufällige Iteration entstandene Sierpinski - Dreiecke mit den Transformationen aus Beispiel 2.1.1 und den Wahrscheinlichkeiten  $p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{3}$  für das linke und  $p_1 = 0,1$ ,  $p_2 = 0,3$ ,  $p_3 = 0,6$  für das rechte Dreieck.



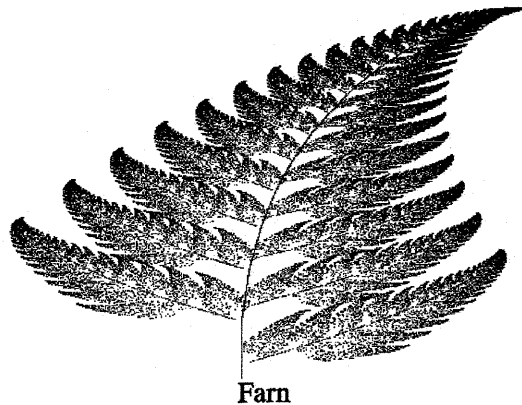
Wenn  $\mu$  das invariante Maß für das rechte Sierpinski - Dreieck ist,  $B$  die Teilmenge des  $\mathbb{R}^2$  innerhalb des Kreises, dann ist

$$\mu(B) = \mu(\{x: \text{die Adresse von } x \text{ beginnt mit } 31\}) = p_3 * p_1 = 0,06.$$

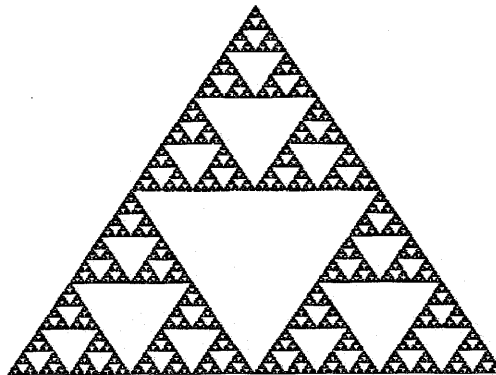
## 2.4 Dimension von Fraktalen

Der Attraktor eines iterierten Funktionensystems ist ein Fraktal. Diese Bezeichnung kennzeichnet eine der wesentlichen Eigenschaften der von uns untersuchten Gebilde:

Sie haben i.a. Lebesguemaß 0 und besitzen keine ganzzahlige Dimension (daher „Fraktal“) [B].



Farn



Sierpinski-Dreieck

Um aber trotzdem die Dimension von Fraktalen vergleichen zu können, ist es nötig, eine geeignete Verallgemeinerung des Dimensionsbegriffes einzuführen.

### Definition 1 (Fraktaldimension)

Sei  $A \subset X$ ,  $(X, d)$  ein metrischer Raum (z.B.  $(\mathbb{R}^n, \text{euklidische Metrik})$ ).

Zu jedem  $\varepsilon > 0$  sei  $N(A, \varepsilon)$  die minimale Anzahl  $\varepsilon$ -Kugeln, um  $A$  zu überdecken.

Wenn

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(N(A, \varepsilon))}{\ln(1/\varepsilon)} \right\}$$

existiert, dann heißt  $D$  die *fraktale Dimension* von  $A$ . [B]

### Bemerkung 1

$D(\mathbb{R}^n) = n$ , d.h. die Fraktaldimension ist verträglich zu der euklidischen Norm.

### Beispiel 1 (Cantormenge)

Sei  $A_0 = [0,1]$ ,  $N=2$ ,

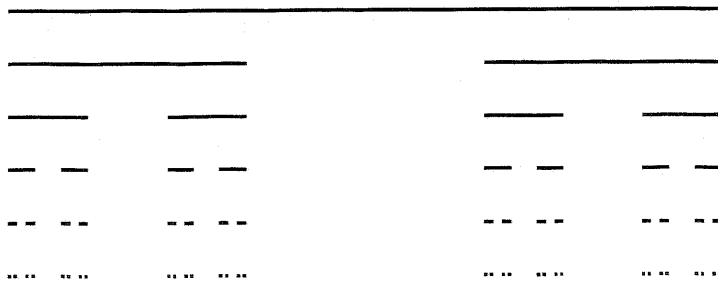
$$w_1(x) = \frac{1}{3}x$$

$$w_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$$

Wir erhalten mit

$$A_{n+1} := \bigcup_{j=1}^N w_j(A_n)$$

die Cantormenge für  $n \rightarrow \infty$ .



Für die Fraktaldimension  $D$  erhalten wir:

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln N(A, \varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)} \right\}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\ln 2^n}{\ln 2/3^{-n}} \right\}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln 2}{\ln 2 + n \ln 3}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{\ln 2}{n \ln 2} + \frac{n \ln 3}{n \ln 2}}$$

$$= \frac{\ln 2}{\ln 3}$$

$$\approx 0.63$$

## Beispiel 2 (Sierpinski-Dreieck)

Ausgehend von einer Menge  $A_0 \subset \mathbb{R}^2$  berechnen wir mit dem deterministischen Algorithmus (s. Definition 2.1.5) die sukzessiven Mengen

$$A_{n+1} := \bigcup_{j=1}^N w_j(A_n) \quad (n=1,2,)$$

mit  $N=3$  und

$$w_1 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

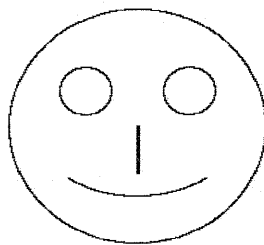
$$w_2 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

$$w_3 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

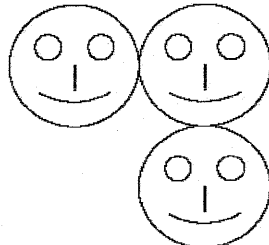
mit  $a, b, c, d, e, f$  geeignet gewählt.

Wir betrachten die Folgenglieder von  $\{A_n\}$ ,  $A_0$  sei der „Smiley“.

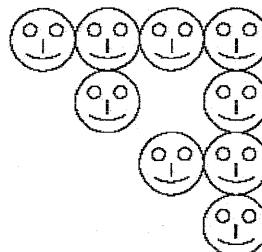
Sei  $A_0$  dem Einheitsquadrat einbeschrieben.



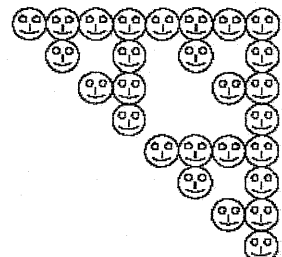
$A_0$



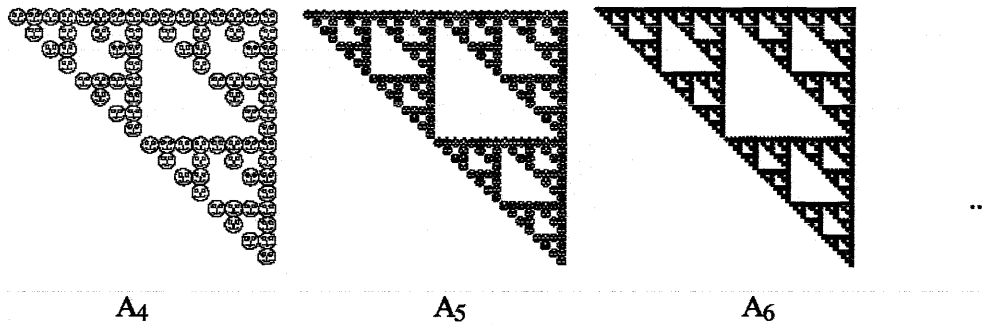
$A_1$



$A_2$



$A_3$



Wir sehen hier nochmals die Unabhängigkeit des Attraktors von der Startmenge.

Wir benötigen im  $n$ -ten Schritt  $3^n$   $\varepsilon$ -Kugeln mit Radius  $2^{-(n+1)}$  zur Überdeckung von  $A_n$ .

Es ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 D &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln N(A, \varepsilon)}{\ln (1/\varepsilon)} \right\} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\ln 3^n}{\ln 2^{n+1}} \right\} \\
 &= \frac{\ln 3}{\ln 2} \\
 &\approx 1.6
 \end{aligned}$$

Eine andere Erweiterung des Dimensionsbegriffes ist die Hausdorffdimension. Wir werden sehen, daß in bestimmten Situationen die Fraktaldimension und die Hausdorffdimension übereinstimmen. Die folgenden Betrachtungen sind aus [B], [H].

### Definition 2

Sei  $m > 0$ ,  $m \in \mathbf{N}$  und  $A$  eine beschränkte Teilmenge des metrischen Raums  $(\mathbb{R}^m, \text{eukl. Metrik})$ .

Sei

$$\text{diam}(A) = \sup \{ d(x, y) : x, y \in A \}.$$

Sei  $0 < \varepsilon < \infty$  und  $0 \leq p < \infty$ .  $\mathcal{A}$  bezeichne die Menge der Folgen von Teilmengen

$\{ A_i \subset A \}$ , so daß  $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ .

Wir definieren

$$\mathcal{M}(A, p, \varepsilon) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam}(A_i))^p : \{A_i\} \in \mathcal{A} \text{ und } \text{diam}(A_i) < \varepsilon \text{ für } i=1,2,3,\dots \right\}.$$

Sei

$$\mathcal{M}(A, p) = \sup \{ \mathcal{M}(A, p, \varepsilon) : \varepsilon > 0 \}.$$

Dann existiert für alle  $p \in [0, \infty]$  ein  $\mathcal{M}(A, p) \in [0, \infty]$ .

Für jedes  $p \in [0, \infty)$  ist das oben definierte  $\mathcal{M}(A, p)$  das *p-dimensionale Hausdorffmaß* von A.

### Lemma 1

Sei  $m > 0$ ,  $m \in \mathbb{N}$  und A eine beschränkte Teilmenge des metrischen Raums  $(\mathbb{R}^m, \text{eukl. Metrik})$ . Sei  $\mathcal{M}(A, p)$  die in Definition 2 definierte Funktion. Dann gibt es ein eindeutiges  $D_H \in [0, m]$ , so daß [B]

$$\mathcal{M}(A, p) = \begin{cases} \infty & \text{wenn } p < D_H \text{ und } p \in [0, \infty], \\ 0 & \text{wenn } p > D_H \text{ und } p \in [0, \infty]. \end{cases}$$

### Definition 2 (Hausdorffdimension)

Sei  $m > 0$ ,  $m \in \mathbb{N}$  und sei A eine beschränkte Teilmenge des metrischen Raums  $(\mathbb{R}^m, \text{eukl. Metrik})$ . Dann ist  $D_H$  die Hausdorff-Dimension von A.

**Lemma 2**

Wenn das IFS total unzusammenhängend oder berührend ist, so stimmen die Fraktaldimension und die Hausdorffdimension überein [B][H]. d.h.

$$D(A) = D_H(A) = D \text{ mit } D \in [0, m] (\mathbb{R}^m)$$

D ist dann die eindeutige Lösung von

$$D = \sum_{k=1}^N |S_k|^D = 1.$$

## 3. Ergodensatz für iterierte Kerne

### 3.1 Modell und Notationen

Im folgenden stellen wir zuerst das in [BE] und [E] betrachtete Modell vor und erweitern dieses dann auf eine allgemeinere Situation.

#### Das bisherige Modell

Das in [BE] und [E] beschriebene Modell ist das folgende:

Sei  $(S, d)$  ein vollständiger, metrischer Raum,  $S$  nicht notwendig kompakt. Seien  $w_i$  ( $i=1, \dots, N$ ) Lipschitz-Transformationen von  $S$  nach  $S$  mit zugeordneten Wahrscheinlichkeiten  $p_i$  und  $\sum_{i=1}^N p_i = 1$  und Startpunkt  $x_0 \in S$ .

Durch den stochastischen Kern  $K$ ,

$$K(x, \bullet) = \sum_{i=1}^N p_i \delta_{w_i x}(\bullet),$$

ist dann ein Markoffprozeß definiert.

Kein  $w_i$  muß eine Kontraktionskonstante kleiner 1 besitzen. Wir fordern lediglich eine Kontraktivität im Durchschnitt (*CIM* = Contraction in the Mean).

#### Definition 1 (CIM, Contraction in the Mean)

Es gelten obige Voraussetzungen.

Wenn

$$\prod_{i=1}^N d(w_i x, w_i y)^{p_i} \leq r d(x, y) \text{ mit } r < 1 \text{ und } \forall x, y \in S$$

gilt, dann ist der durch  $K(x, \bullet)$  gegebene Markoffprozeß *im Schnitt kontrahierend*.

Die Trajektorie des Prozesses  $\{x_0, w_{i_1} x_0, w_{i_2} w_{i_1} x_0, \dots\}$  erzeugt das Fraktal als Teilmenge von  $S$ .



**Lemma 1**

Die Voraussetzungen seien wie oben.

CIM ist äquivalent zu

$$E \left[ \log \frac{d(Z_1^x, Z_1^y)}{d(x, y)} \right] < 0$$

**Beweis:**

$$\prod_{i=1}^N d(w_i^x, w_i^y)^{p_i} \leq r d(x, y)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^N p_i \log d(w_i^x, w_i^y) \leq \log r + \log d(x, y)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^N p_i \log d(w_i^x, w_i^y) \leq \log r + \sum_{i=1}^N p_i \log d(x, y)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^N p_i \log \frac{d(w_i^x, w_i^y)}{d(x, y)} \leq \log r$$

Da  $\log r < 0$

$$\Leftrightarrow E \left[ \log \frac{d(Z_1^x, Z_1^y)}{d(x, y)} \right] < 0$$

**Definition 2**

Sei der Adreßraum  $\Omega = N^N = \{ \hat{i} = (i_1, i_2, \dots) : 1 \leq i_k \leq N \forall k \}$

Eine Adresse  $\hat{i}$  legt die Reihenfolge der Anwendung der Abbildungen  $w_i$  fest.

$P_\Omega$  sei das Produktmaß auf  $\Omega$ .

Für jedes  $x \in S$  definieren wir eine Folge  $Z_n^x(\hat{i}) : \Omega \rightarrow S$  durch

$$Z_n^x(\hat{i}) = w_{i_n} w_{i_{n-1}} \dots w_{i_1} x.$$

Die Folge  $\{Z_n^x\}$  gibt die Position des Prozesses nach n-maliger Anwendung der durch  $\hat{i}$  festgelegten Abbildungen an.

Für jedes  $x \in S$  definieren wir eine Folge  $Y_n^x(\hat{i}) : \Omega \rightarrow S$  durch

$$Y_n^x(\hat{i}) = w_{i_1} w_{i_2} \dots w_{i_n} x.$$

### Lemma 2

Die Y-Folge  $\{Y_n^x\}$  ist eine Cauchy-Folge [BE].

### Bemerkung 1

Die Aussage von Lemma 2 ist eine der zentralen Aussagen des Artikels von [BE] und ist Grundlage der Existenz des invarianten Maßes.

Da  $S$  ein vollständiger Raum ist, hat die Cauchy-Folge  $\{Y_n^x\}$  ihren Grenzwert in  $S$ . Über diesen Grenzwert definieren wir das für unseren Prozeß invariante Maß  $\mu$ .

### Lemma 3

Der Grenzwert

$$\phi_x(i) = \lim_{n \rightarrow \infty} Y_n^x(i) = \lim_{n \rightarrow \infty} w_{i_1} \dots w_{i_n} x$$

existiert für P-f.a.  $i \in \Omega$  und ist unabhängig von  $x$  ( $\phi_x = \phi_y$  f.s. für alle  $x, y \in S$ ). Das invariante Maß  $\mu$  hat die Darstellung [BE]

$$d\mu = dP\phi_x^{-1}.$$

### Bemerkung 2

Die Menge der Punkte aus  $S$  der Z-Folge ist der Attraktor des Fraktals [BE].

Dieses Fraktal ist Träger des für diesen Prozeß invarianten Maßes  $\mu$ .

Wir erhalten einen Ergodensatz, der uns eine  $P_\Omega$ -f.s. Konvergenz von

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n f(w_{i_k} \dots w_{i_1} x) \rightarrow \int f d\mu \quad \text{mit } f \in \mathcal{C}_b(S)$$

liefert (für  $\mu$ -f.a.  $x$ ) und mit einem erweiterten Ergodensatz auch die Konvergenz für beliebige  $x \in S$ , insbesondere auch für Startpunkte, die nicht im Träger von  $\mu$  liegen. Dies ist die Hauptaussage von [E].

### Erweiterung des Modells

Wir erweitern dieses Modell nun, indem wir anstelle von Transformationen nicht-deterministische Übergangskerne  $K_i(x, \bullet)$  (d.h.  $\neq \delta_{w_i}$ , also keine Einpunktverteilungen)

betrachten.

Die  $K_i$  setzen wir als Feller voraus.

Wir erhalten einen Markoffkern

$$K(x, \bullet) = \sum p_i K_i(x, \bullet)$$

### Bemerkung 3

Während unser Prozeß - oder genauer gesagt, unsere Trajektorie - bisher nur von der zufälligen Anwendung der  $w_i$  abhängig war (abgesehen vom Startpunkt), so liegt nun ein „doppelter“ Zufall vor. Neben der weiterhin gültigen zufälligen Auswahl der Übergangskerne steckt in diesen ein inhärenter zweiter Zufall, d.h. bei bekanntem  $i$  ist lediglich die Verteilung des Aufenthaltsortes der Trajektorie bekannt, nicht aber der exakte Aufenthaltsort.

Im folgenden werden wir die dadurch entstehende Situation näher betrachten.

### Beispiel 1

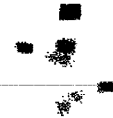
Im folgenden Beispiel haben wir die vier bekannten  $w_i$  (also die Kerne  $\delta_{w_i}$ ) des Farns um eine Gleichverteilung auf einem Intervall erweitert, d.h. wir bilden  $x$  auf  $w_i(x)$  ab und verteilen dann um  $w_i(x)$  gemäß einer Gleichverteilung.

Wir erhalten einen „verwaschenen“ Farn.

Wir betrachten die Entwicklung eines Startpunktes  $(x_0 = (0,0) \in \mathbb{R}^2)$  unter 10000 Adressen  $\hat{i}$ , d.h. wir betrachten die gleichzeitige Entwicklung von 10000 Z-Folgen für  $n=1, \dots, 6$ :



n=1



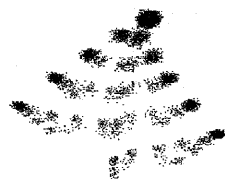
n=2



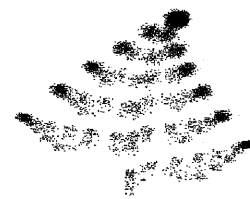
n=3



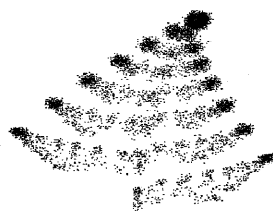
n=4



n=5



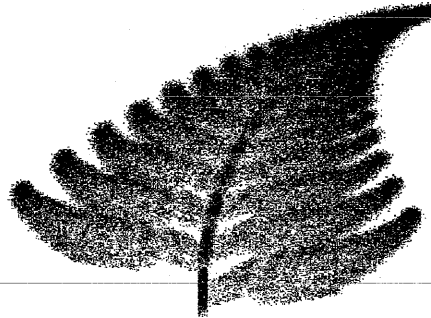
n=6



n=7



n=8



$$n \rightarrow \infty$$

Es stellt sich nun die Frage, ob auch für diesen Prozeß ein invariantes Maß  $\mu$  existiert und ob wir auch hier einen Ergodensatz bzw. einen erweiterten Ergodensatz formulieren können.

Ein wesentliches Beweisargument im Falle der Transformationen  $w_i$  ist der Zusammenhang zwischen der Adresse  $\hat{i}$  und dem Aufenthaltsort der Trajektorie auf  $S$  ( $x, w_{i_1} x, w_{i_2} w_{i_1} x, \dots$ ).

Ein unmittelbarer Zusammenhang zwischen  $\hat{i}$  und dem Aufenthaltsort auf  $S$  ist nun aber nicht mehr gegeben, da wir uns von Verteilung zu Verteilung bewegen ( $\nu, \nu K_{i_1}, \nu K_{i_1} K_{i_2}, \dots$ ).

Wir können lediglich Aussagen über den erwarteten Aufenthalt der Trajektorie zu einem bestimmten Zeitpunkt machen.

Eine zu dem bisherigen Modell der Trajektorie auf  $S$  analoge Aussage können wir aber auf  $\mathcal{M}_1(S)$  machen (Trajektorie auf  $\mathcal{M}_1(S)$ ).

Wir betrachten die Trajektorie des Prozesses auf  $\mathcal{M}_1(S)$ , d.h. wir betrachten den durch

$$\bar{K}(\nu, \bullet) = \sum p_i \delta_{\nu K_i}(\bullet)$$

gegebenen Markoffprozeß mit Trajektorie

$$\{\nu, \nu K_{i_1}, \nu K_{i_1} K_{i_2}, \dots\}$$

(mit  $\nu = \delta_{x_0}$  Startpunkt), d.h.

$$\underbrace{K(x, \bullet) = \sum p_i K_i(x, \bullet)}_{\text{definiert MP auf } S} \rightarrow \underbrace{\bar{K}(\nu, \bullet) = \sum p_i \delta_{\nu K_i}(\bullet)}_{\text{definiert MP auf } \mathcal{M}_1(S)}$$

Auf  $\mathcal{M}_1(S)$  ist der Zusammenhang zwischen  $\hat{i}$  und der Trajektorie  $\nu_{K_1} K_2 \dots$  wieder analog zu der Situation auf  $S$ , d.h. bei gegebenem  $\hat{i}$  kann zu jedem Zeitpunkt  $n$  der Aufenthaltsort der Trajektorie auf  $S$  bestimmt werden.

Es ist zu erwarten, daß die Beweisideen des bisherigen Modells in ähnlicher Form übernommen werden können. Wir zeigen im folgenden, daß

erstens ein invariantes Maß  $\bar{\mu}$  mit  $\bar{\mu} \in \mathcal{M}_1(\mathcal{M}_1(S))$  existiert und daß wir zweitens einen Ergodensatz

$$\frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n \bar{f}(Z_j^v(\hat{i})) \rightarrow \int \bar{f} d\bar{\mu} \quad P_{\Omega} \text{-f.s.}$$

mit  $\bar{f} \in \mathcal{C}_b(\mathcal{M}_1(S))$  und beliebigem  $v \in \mathcal{M}_1(S)$  erhalten.

Die Verbindung zum invarianten Maß auf  $S$  erhalten wir über das Intensitätsmaß

$$\mu(A) = \int \nu(A) \bar{\mu}(d\nu) \quad \text{mit } \mu K = \mu$$

Der Ergodensatz auf  $\mathcal{M}_1(S)$  liefert für die Trajektorie auf  $S$  keine konkrete Positionsaussage, sondern nur eine Aussage über die erwartete Position.

Wir benötigen aber eine Aussage über beliebige Trajektorien unten. Dies werden wir über die Verbindung zwischen dem erwarteten und dem tatsächlichen Aufenthalt der Trajektorie zeigen, d.h. wir schaffen eine Verbindung zwischen dem „einfachen“ Zufall bei der Entwicklung der Trajektorie auf  $\mathcal{M}_1(S)$  und dem „doppelten“ Zufall der Trajektorie auf  $S$  (s. Bemerkung 3).

Wir erhalten dann wieder einen Ergodensatz für den Prozeß auf  $S$  (s. Satz 3.4.2.)

$$\frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^n f(Z_j^x(\bar{\omega})) \rightarrow \int f d\mu \quad P_x \text{-f.s. } \forall x \in S \quad \forall f \in \mathcal{C}_b(S)$$

Dieser Ergodensatz erst liefert uns die für die Anwendung wichtige Aussage, daß der Prozeß außerhalb des Trägers des invarianten Maßes gestartet werden kann.

Zusammengefaßt wird unser Beweisweg also folgendermaßen aussehen:

„unten“ (auf dem Zustandsraum)

„oben“ (auf dem Maßraum)

$$K(x, \cdot) = \sum p_i K_i(x, \cdot)$$

→

$$\bar{K}(v, \cdot) = \sum p_i \delta_{vK_i(\cdot)}$$

↓

Intensitätsmaß :

$$\mu(A) = \int v(A) \mu(dv)$$

mit  $\mu K = \mu$  (Invarianz)

←

invariantes Maß  $\bar{\mu}$   
( $\bar{\mu} K = \bar{\mu}$ )

↓

Ergodensatz :

unabhängig vom Startpunkt  $x \in S$  und für  
alle  $f \in C_b(S)$  (mit  $Z_j^x$  Trajektorie des  
Prozesses auf  $S$ ),  $\bar{\omega} \in \bar{\Omega} := S^{(0,1,\dots]} \times \Omega$ :

$$\frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n f(Z_j^x(\bar{\omega})) \rightarrow \int f d\mu \quad P_x\text{-f.s.}$$

←

Ergodensatz :

Es gilt für alle  $\bar{f} \in C_b(\mathcal{M}_1(S))$  :  
( $P_\Omega = \text{Pfadraummaß, } \hat{\omega} \in \Omega = N^{\mathbb{N}}$ )

$$\frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n \bar{f}(Z_j^v(\hat{\omega})) \rightarrow \int \bar{f} d\bar{\mu} \quad P_\Omega\text{-f.s.}$$

### Definition 3

Sei  $(S, d)$  ein kompakter metrischer Raum,  $S = \mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{M}_1(S)$  sei die Menge der  
Wahrscheinlichkeitsmaße auf  $S$ . Die *Wasserstein -Metrik*  $d_W$  auf  $\mathcal{M}_1(S)$  wird definiert  
durch [DO]

$$d_W(\lambda, \nu) = \inf_{\substack{\gamma \text{ auf } S \times S \\ \gamma \text{ hat Projektion } \nu, \lambda}} \int d(x, y) \gamma(dx, dy)$$

### Bemerkung 4

In [V] wird gezeigt, daß

$$d_W(\lambda, \nu) = \inf_{\substack{\gamma \text{ auf } S \times S \\ \gamma \text{ hat Projektion } \nu, \lambda}} \int d(x, y) \gamma(dx, dy)$$

$$\begin{aligned}
&= \sup \left\{ \int_S f d\lambda - \int_S f d\nu : f: S \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ stetig}, |f(x)-f(y)| \leq d(x,y) \quad \forall x, y \right\} \\
&= \sup_{\substack{f \text{ Lipschitz} \\ L(f) \leq 1}} \left| \int f d\nu - \int f d\lambda \right|
\end{aligned}$$

$\forall \lambda, \nu \in \mathcal{M}_1(S), S = \mathbb{R}^n, L(f)$  Lipschitzkonstante von  $f$ .

Zur Formulierung unseres Kontraktionsbegriffs *CIM* benötigen wir einen Zusammenhang zwischen der Definition der Wassersteinmetrik und einer Kontraktion auf Verteilungen:

### Lemma 3

Sei  $d_W$  die Wassersteinmetrik,  $x, y \in S$  und  $\gamma \in \mathbb{R}$ .

Aus

$$d_W(K(x, \cdot), K(y, \cdot)) \leq \gamma d(x, y)$$

folgt

$$d_W(\nu K, \lambda K) \leq \gamma d(\nu, \lambda)$$

für alle  $\nu, \lambda \in \mathcal{M}_1(S)$ .

Beweis:

$$\begin{aligned}
&\left| \int f d(\nu K) - \int f d(\lambda K) \right| \\
&= \left| \int (Kf) d\nu - \int (Kf) d\lambda \right| \\
&\leq L(Kf) d(\nu, \lambda) \\
&\leq \gamma L(f) d(\nu, \lambda),
\end{aligned}$$

denn



$$\begin{aligned}
|Kf(x) - Kf(y)| &= \left| \int f \, dK(x, \bullet) - \int f \, dK(y, \bullet) \right| \\
&\leq L(f) \, d_W(K(x, \bullet), K(y, \bullet)) \\
&\leq L(f) \, \gamma(x, y),
\end{aligned}$$

also

$$L(Kf) \leq \gamma \cdot L(f)$$

#### Definition 4

Sei der Adreßraum  $\Omega$  wie in Definition 2 definiert.

Eine Adresse  $\hat{i}$  legt die Reihenfolge der Anwendung der Abbildungen  $w_i$  fest.

$P_\Omega$  sei das Produktmaß auf  $\Omega$  mit  $\{p_j, j=1, \dots, N\}$  als Wahrscheinlichkeitsverteilung auf jedem Faktor.

Für jedes  $\nu \in \mathcal{M}_1(S)$  definieren wir eine zufällige Folge auf  $\Omega$  durch

$$\bar{Y}_n^\nu(\hat{i}) := \nu K_{i_n} \dots K_{i_1}.$$

Für jedes  $\nu \in \mathcal{M}_1(S)$  definieren wir eine zufällige Folge auf  $\Omega$  durch

$$\bar{Z}_n^\nu(\hat{i}) := \nu K_{i_1} \dots K_{i_n}.$$

$\bar{Z}_n^\nu$  liefert also den Aufenthaltsort unserer Trajektorie im Raum der Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf  $S$  zum Zeitpunkt  $n$ .

#### Bemerkung 5

Während die  $\bar{Z}_n^\nu$ -Folge den Verlauf der Trajektorie unseres Prozesses angibt und keinerlei

Konvergenzverhalten zeigt, verhält sich die  $\bar{Y}_n^\nu$ -Folge grundlegend anders: Sie hat im

Gegensatz zur  $\bar{Z}_n^\nu$ -Folge eine feste 'letzte' Entwicklung in dem Sinne, daß sich bei größerem

n die Anfangsentwicklung der Folge verlängert (siehe Kapitel 2.2, Erläuterungen zu Beispiel 3). Aus diesem Sachverhalt werden wir die Konvergenz der  $\bar{Y}_n^Y$ -Folge herleiten.

Das Verhalten der Y- und Z-Folgen und insbesondere die Konvergenz der Y-Folge werden in [B] sehr anschaulich dargestellt (siehe auch Beispiel 2.2.3).

### Definition 5

Ein Markoffprozeß auf  $\mathcal{M}_1(S)$  ist gegeben durch

$$\bar{K}(v, \bullet) = \sum_{i=1}^N p_i \delta_{vK_i}(\bullet) \text{ mit Startpunkt } v = \delta_{x_0} \in \mathcal{M}_1(S)$$

### Definition 6 (Kontraktivitätsbedingung CIM)

Auch in unserem erweiterten Modell benötigen wir keine strikten Kontraktionen der  $K_i$ , sondern lediglich eine Kontraktivität im Durchschnitt.

Seien  $v, \lambda \in \mathcal{M}_1(S)$ , sei  $d_W$  die Wassersteinmetrik auf  $\mathcal{M}_1(S)$  und die  $p_i$  wie oben.

Wenn

$$\prod_{i=1}^N d_W(vK_i, \lambda K_i)^{p_i} \leq r d_W(v, \lambda), \quad r < 1$$

erfüllt ist, dann heißt K im Schnitt kontraktiv.

### Bemerkung 6

CIM ist äquivalent zu

$$E \left[ \log \frac{d_W(\bar{Z}_1^v, \bar{Z}_1^\lambda)}{d_W(v, \lambda)} \right] < 0$$

Beweis:

$$\text{CIM} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^N p_i \log d_W(vK_i, \lambda K_i) \leq \log r + \log d_W(v, \lambda)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^N p_i \log d_W(vK_i, \lambda K_i) \leq \log r + \sum_{i=1}^N p_i \log d_W(v, \lambda)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^N p_i \log \frac{d_W(vK_i, \lambda K_i)}{d_W(v, \lambda)} \leq \log r$$

Da  $\log r < 0$

$$\Leftrightarrow E \left[ \log \frac{d_W(\bar{Z}_1^v, \bar{Z}_1^\lambda)}{d_W(v, \lambda)} \right] < 0$$

■

### 3.2 Das Invariante Maß auf $\mathcal{M}_1(S)$

Im folgenden beweisen wir die Existenz des invarianten und attraktiven Maßes  $\bar{\mu}$  für den oben definierten Markoffprozesses, d.h. für  $\bar{\mu}$  muß gelten:

#### Definition 1

Es gelten die Voraussetzungen aus 3.1.

$\bar{\mu}$  ist ein attraktives und invariantes Maß, wenn folgendes erfüllt ist:

$$1) \nu K^n \xrightarrow{\text{schwach}} \bar{\mu} \text{ für alle } \nu \in \mathcal{M}_1(S) \quad (\text{Attraktivität})$$

$$2) \bar{\mu} K = \bar{\mu} \quad (\text{Invarianz})$$

Zum Nachweis der Existenz des attraktiven und invarianten Maßes benötigen wir noch zwei Lemmata.

Lemma 1 liefert uns Aussagen über den Verlauf der Trajektorie unter zwei verschiedenen Startpunkten  $\nu, \lambda$ . Wir werden sehen, daß die beiden Trajektorien beliebig nahe verlaufen mit wachsendem  $n$ .

Lemma 2 wird uns zeigen, daß ein attraktives Maß unter unseren Voraussetzungen auch invariant ist.

#### Lemma 1

Seien  $\nu, \lambda \in \mathcal{M}_1(S)$ ,  $S = \mathbb{R}^n$ ,  $\nu \neq \lambda$ ,  $r < r_1 < 1$ ,

$$\delta := \min_{i=1, \dots, N} \{p_i\}, \quad r \text{ ist CIM-Konstante.}$$

i)  $\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon$  und  $W \subset \Omega$  mit  $P_\Omega(W) < \varepsilon$ , sodaß für  $n \geq n_\varepsilon \Rightarrow$

$$d_W(\nu K_{i_1} \dots K_{i_n}, \lambda K_{i_1} \dots K_{i_n}) \leq r_1^n d(\nu, \lambda)$$

außer für  $(i_1, i_2, \dots) \in W$ ,

ii)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_W(\nu K_{i_1} \dots K_{i_n}, \lambda K_{i_1} \dots K_{i_n}) = 0 \text{ } P_\Omega\text{-f.s.}$$

Dieses Lemma wird sowohl zum Beweis der Existenz des invarianten Maßes, als auch später beim Ergodensatz benötigt.

Wir beweisen das Lemma mit einem Martingalargument.

Beweis:

$$\delta = \min_{i=1, \dots, N} \{p_i\},$$

$r$  ist CIM-Konstante,

$$s = \max \{s_i; i=1, \dots, N\} \text{ o.B.d.A.: } s \geq 1$$

$s_i$  Kontraktionskonstante der  $K_i$ , d.h.  $d_W(\nu K_i, \lambda K_i) \leq s_i d_W(\nu, \lambda)$  für  $i=1, \dots, N$ .

Wir definieren eine Zufallsvariable  $X_n$  auf  $\Omega$ :

$$X_n(i_1, i_2, \dots) = \begin{cases} \log \frac{d_W(\nu K_{i_1} \dots K_{i_n}, \lambda K_{i_1} \dots K_{i_n})}{d_W(\nu K_{i_1} \dots K_{i_{n-1}}, \lambda K_{i_1} \dots K_{i_{n-1}})} \vee \frac{1}{\delta} \log \frac{r}{s} \\ \text{wenn } d_{n-1} := d_W(\nu K_{i_1} \dots K_{i_{n-1}}, \lambda K_{i_1} \dots K_{i_{n-1}}) \neq 0 \\ \text{sonst } \log r \end{cases}$$

Zu zeigen:  $E[X_n | i_1, \dots, i_{n-1}] \leq \log r \quad \forall n \geq 1$

Angenommen,  $d_{n-1} \neq 0$

$$\text{Dann ist } E[X_n | i_1, \dots, i_{n-1}] = \sum_{i_n=1}^N p_{i_n} \left[ \log \frac{d_n}{d_{n-1}} \right] \vee \frac{1}{\delta} \log \frac{r}{s}$$

$$1) E[X_n | i_1, \dots, i_{n-1}] \geq \frac{1}{\delta} \log \frac{r}{s}$$

da nach Voraussetzung

$$\prod_{i=1}^N d_W(\nu K_i, \lambda K_i)^{p_i} \leq r d_W(\nu, \lambda)$$

gilt, folgt

$$\sum_{i=1}^N p_i \log d_W(\nu K_i, \lambda K_i) \leq \log r,$$

also  $E[X_n | i_1, \dots, i_{n-1}] \leq \log r$ .

Wenn für einige Terme  $\log \frac{d_n}{d_{n-1}} = \log \frac{d_W(\nu K_{i_1} \dots K_{i_n}, \lambda K_{i_1} \dots K_{i_n})}{d_W(\nu K_{i_1} \dots K_{i_{n-1}}, \lambda K_{i_1} \dots K_{i_{n-1}})} \leq \frac{1}{\delta} \log \frac{r}{s} < 0$  ist

( $\log r/s$  ist kleiner als 0, da  $0 < r/s < 1$ ), dann folgt mit  $p_i \geq \delta$  (wegen  $\delta = \min \{p_i\}$ ), daß

$$\sum_{i=2}^n p_i \log \frac{d_n}{d_{n-1}} + p_{i_1} \frac{1}{\delta} \log \frac{r}{s} \leq \log r \quad (*)$$

ist, da  $p_i \frac{1}{\delta} \geq 1$  und  $\log \frac{r}{s} < 0$ . Mit  $\log \frac{d_n}{d_{n-1}} \leq \log s$  und damit  $\sum_{i=2}^n p_i \log \frac{d_n}{d_{n-1}} < \log s$  ist (\*) also

äquivalent zu

$$\sum_{i=2}^n p_i \log \frac{d_n}{d_{n-1}} \leq \log r - \log \frac{r}{s} = \log s.$$

Daraus folgt schließlich, daß  $E[X_n | i_1, \dots, i_{n-1}] \leq \log r$  für alle  $n \geq 1$ .

Sei nun  $D_n = X_n - E[X_n | i_1, \dots, i_{n-1}]$ , dann ist  $D_n$  ist eine Martingaldifferenzfolge und  $|D_n| \leq 2|X_n| \leq B$ .

$$U_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} D_k \text{ ist Martingal}$$

Da

$$E[U_{n+1} | i_1, \dots, i_n] = U_n$$

ist, gilt

$$\begin{aligned} & E \left[ \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} D_k \mid i_1, \dots, i_n \right] \\ &= \underbrace{E \left[ \frac{1}{n+1} D_{n+1} \mid i_1, \dots, i_n \right]}_{=0, \text{ da Martingaldifferenz}} + \underbrace{E \left[ \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} D_k \mid i_1, \dots, i_n \right]}_{=U_n} = U_n \end{aligned}$$

$$E[U_n^2] = E\left[\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} D_k\right)^2\right]$$

und durch Wegfall der gemischten Terme

$$= E\left[\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} D_k^2\right]$$

$$\leq B^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

d.h.,  $U_n$  ist ein  $L^2$ -beschränktes Martingal. Daraus folgt, da  $D_k$  orthogonal zu  $D_l$  ist (Martingaldifferenz), daß

$$E[U_n^2] \leq B^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

und damit, daß  $U_n$  fast sicher konvergiert.

Kroneckers Lemma besagt, daß für eine positive, gegen unendlich gehende Folge  $c_n$  und

konvergierende Summe  $\sum_{k=1}^n \frac{D_k}{c_k}$  auch die Summe  $\frac{1}{c_n} \sum_{k=1}^n U_k$  konvergiert (gegen 0).

Damit gilt dann fast sicher, daß

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n D_k = 0$$

Damit folgt

$$\overline{\lim} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log \frac{d_k}{d_{k-1}} - \log r \leq 0 \text{ f.s.}$$

$$\overline{\lim} \log \left( \frac{d_W(vK_{i_1} \dots K_{i_n}, \lambda K_{i_1} \dots K_{i_n})}{d_W(v, \lambda)} \right)^{\frac{1}{n}} \leq \log r \text{ f.s.}$$

Es gilt also

$$\overline{\lim} \left( \frac{d_W(vK_{i_1} \dots K_{i_n}, \lambda K_{i_1} \dots K_{i_n})}{d_W(v, \lambda)} \right)^{\frac{1}{n}} \leq r < r_1 \text{ f.s. ,}$$

womit i) hergeleitet ist. Mit  $\frac{d}{d_0} \leq r^n$  ( $d_0 \neq 0$ ) ergibt sich dann auch ii).

### Lemma 2 (Attraktivität und Invarianz)

Unter obigen Voraussetzungen gilt, daß das attraktive Maß auch invariant ist.

**Beweis:**

Dazu definieren wir einen Operator T, mit  $f \in C_b(\mathcal{M}_1(S))$

$$Tf(v) = \int f(\lambda) Q(v, \lambda) = E[f(V_1^v)]$$

mit  $\{V_n^v\}$  Markoffprozeß mit Start in v und Übergangswahrscheinlichkeit Q.

T:  $C_b(\mathcal{M}_1(S)) \rightarrow C_b(\mathcal{M}_1(S))$ ,  $\{V_n\}$  sei Markoffprozeß mit Startverteilung  $\tau$ ,  $\rho$  sei Verteilung von  $V_1$ .

Dann gilt für alle  $f \in C_b(\mathcal{M}_1(S))$

$$\begin{aligned} \int f d\rho &= E[f(V_1)] = \int E[f(V_1) | V_0=v] d\tau(v) \\ &= \int Tf(v) d\tau(v) = \tau T, \quad \tau T = \rho \text{ ist Verteilung von } V_1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \tau T^n$  ist Verteilung von  $V_n$ .



Also konvergiert  $V_n$  schwach gegen  $\bar{\mu}$  für alle Anfangsverteilungen  $\tau \Leftrightarrow$

$$\tau T \xrightarrow{\text{schwach}} \bar{\mu} \quad \forall \tau \in \mathcal{M}_1(\mathcal{M}_1(S))$$

und mit der Stetigkeit von  $Tf(v) = \sum_{i=1}^N p_i f(vK_i)$  in  $v$  (da  $K_i$  stetig: CIM / Voraussetzung), gilt,

daß  $\tau T$  stetig in  $\tau$  und somit  $\tau T^n T \rightarrow \bar{\mu} T$  und  $\tau T T^n \rightarrow \bar{\mu}$

d.h. mit der Folgenstetigkeit von  $T$  gilt die Invarianz  $\bar{\mu} T = \bar{\mu}$  .

■

### Satz 1

Es gelten obige Voraussetzungen.

Es existiert

$$\bar{\phi}_v = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{Y}_n^v$$

mit

$$\bar{\phi}_v \in \mathcal{M}_I(S)$$

und das für unseren Prozeß eindeutige, attraktive und invariante Maß (s. Def. 3.2.1) läßt sich identifizieren als

$$\bar{\mu}(B) = P_{\Omega} \bar{\phi}_v^{-1}(B), \quad B \in \mathcal{M}_I(S)$$

**Beweis:**

Zuerst zeigen wir, daß  $\bar{Y}_n^v$  eine Cauchyfolge ist.

Nach Def. 3.1.3 sind  $\bar{Y}_n^v$  und  $\bar{Z}_n^v$  definiert als

$$\bar{Z}_n^v(i) := vK_{i_1} \dots K_{i_n} \quad \text{und} \quad \bar{Y}_n^v(i) := vK_{i_1} \dots K_{i_1}$$

Aus Lemma 1 folgt mit  $\eta < 1$  und  $r_1 < 1$

$$P\left(d_W(\bar{Z}_n^v, \bar{Z}_n^\lambda) > \eta^n d_W(v, \lambda)\right) < r_1^n$$

und, da endliche Sequenzen reversibel sind, gilt ebenfalls

$$P\left(d_W(\bar{Y}_n^v, \bar{Y}_n^\lambda) > \eta^n d_W(v, \lambda)\right) < r_1^n$$

Wir setzen  $\lambda = vK_{i_{n+1}}$  und  $C = \max_{1 \leq i \leq N} \{d_W(v, vK_{i_1})\}$  und erhalten

$$P\left(d_W(\bar{Y}_n^v, \bar{Y}_{n+1}^v) > \eta^n C\right) < r_1^n$$

und mit den Eigenschaften einer geometrischen Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(d_W(\bar{Y}_n^v, \bar{Y}_{n+1}^v) > \eta^n C) < \infty$$

(B-C)  $d_W(\bar{Y}_n^v, \bar{Y}_{n+1}^v) \leq \eta^n C$  gilt für genügend großes  $n$ , also  
 $\Rightarrow$

$$\sum_{n=0}^{\infty} d_W(\bar{Y}_n^v, \bar{Y}_{n+1}^v) < \infty \text{ f.s.} \Rightarrow \bar{Y}_n^v(i) \text{ ist Cauchyfolge f.s.}$$

Da  $\mathcal{M}_1(S)$  zusammen mit der Wassersteinmetrik keinen vollständigen Raum bildet (dies wird u.a. in [DU] gezeigt), ist die Existenz des Grenzwertes der Cauchyfolge nicht ohne weiteres klar.

Mit folgender Betrachtung läßt sich die Existenz des Grenzwertes der Cauchyfolge in  $\mathcal{M}_1(S)$  aber zeigen. Wir greifen dabei auf Ergebnisse aus [DO], [V] und [EK] zurück.

**Behauptung:**

Der Grenzwert der Cauchyfolge  $\bar{Y}_n^v(i)$  existiert in  $\mathcal{M}_1(S)$ . Die Konvergenz gegen den Grenzwert ist schwach.

**Beweis:**

Es gilt:  $\bar{Y}_n^v(i)$  ist eine Cauchyfolge bezüglich der Wassersteinmetrik.

Für  $S = \mathbb{R}^n$  und alle  $\nu, \lambda \in \mathcal{M}_1(S)$  gilt, daß [DO]

$$\Pi(\nu, \lambda) \leq (d_W(\nu, \lambda))^{\frac{1}{2}}$$

mit  $\Pi$  Prohorovmetrik

$$\Pi(\nu, \lambda) := \inf \{ \varepsilon > 0 : \nu(F) \leq \lambda(F^\varepsilon) + \varepsilon \ \forall F \in \mathcal{C} \}$$

mit  $\mathcal{C}$  Familie von abgeschlossenen Teilmengen von  $S$  und

$$F^\varepsilon := \{ x \in S : \inf_{y \in F} d(x, y) < \varepsilon \}$$

Daraus folgt, daß  $\bar{Y}_n^{(i)}$  eine Cauchyfolge in der Prohorovmetrik ist.

Aus (S,d) vollständig folgt, daß  $(\mathcal{M}_1(S), \Pi)$  vollständig ist [EK].

Daraus folgt, daß die Cauchyfolge  $\bar{Y}_n^{(i)}$  ihren Grenzwert in  $\mathcal{M}_1(S)$  hat, d.h.

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{Y}_n^{(i)} \in \mathcal{M}_1(S), \text{ d.h. } \bar{Y}_n^{(i)} \xrightarrow{\text{schwach}} \bar{\phi}_v$$

Also:

$$\bar{\phi}_v = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{Y}_n^{(i)} \text{ und } \bar{\phi}_v \in \mathcal{M}_1(S)$$

Wir fahren nun mit der Identifikation des invarianten Maßes fort und zeigen dann die Attraktivität dieses Maßes.

Wir identifizieren das invariante Maß  $\bar{\mu}$  auf  $\mathcal{M}_1(S)$  als Bild von  $P_\Omega$  unter der Abbildung  $\bar{\phi}_v$ :

$$\bar{\mu}(B) = P_\Omega \bar{\phi}_v^{-1}(B), \quad B \subset \mathcal{M}_1(S)$$

$\bar{\mu}$  ist attraktiv, denn mit der Reversibilität von endlichen Folgen folgt

$$E[f(\bar{Z}_n^v)] = E[f(\bar{Y}_n^v)] \quad \forall n, v$$

und somit für f.a. v

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} E[f(\bar{Z}_n^v)] &= \lim_{n \rightarrow \infty} E[f(\bar{Y}_n^v)] \\ &= E[f(\bar{\phi}_v)] \\ &= \int f(\bar{\phi}_v) dP_\Omega \\ &= \int f d\bar{\mu} \quad (*) \end{aligned}$$

nach Definition von  $\bar{\mu}$  und für  $f \in C_b(S)$ .

Nun sei  $\tau \in \mathcal{M}_1(\mathcal{M}_1(S))$  beliebig,  $\{\bar{Z}_n\}$  sei Markoffprozeß mit  $\bar{Z}_0$  Verteilung von  $\tau$ .

Dann ist

$$\begin{aligned} E[ f(\bar{Z}_n) ] &= \int E[ f(\bar{Z}_n) | \bar{Z}_0 = v ] d\tau(v) \\ &= \int E[ f(\bar{Z}_n^v) ] d\tau(v) \end{aligned}$$

Nun folgt mit Lebesgue und (\*)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} E[ f(\bar{Z}_n) ] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int E[ f(\bar{Z}_n^v) ] d\tau(v) \\ &= \int \left( \int f d\bar{\mu} \right) d\tau(v) \\ &= \int f d\bar{\mu} \end{aligned}$$

Mit dem Ergebnis aus Lemma 2, daß ein attraktives und damit eindeutiges Maß unter unseren Voraussetzungen invariant ist, folgt die Invarianz von  $\bar{\mu}$ .

■

### 3.3 Ergodensatz auf $\mathcal{M}_1(S)$

Der Ergodensatz liefert die schwache Konvergenz der empirischen Verteilung der Trajektorie  $\bar{Z}_n^v(i)$  gegen das für den Prozeß eindeutige attraktive invariante Maß  $\bar{\mu}$  für  $\bar{\mu}$ -f.a. Startpunkte  $v \in \mathcal{M}_1(S)$ . Ziel dieses Kapitels ist es zu zeigen, daß sie sich auch für beliebigen Startpunkt  $v \in \mathcal{M}_1(S)$  einstellt, d.h., daß das invariante Maß durch eine Trajektorie mit beliebigem Startpunkt beliebig genau angenähert oder "erzeugt" werden kann.

$\mathcal{M}_1(S)$  ist ein polnischer Raum, da  $S$  polnisch ist. Auf  $(\mathcal{M}_1(S), d_W)$  läuft ein Markov-Prozess, der durch ein Maß als Startpunkt im Maßraum  $\mathcal{M}_1(S)$  und durch die Übergangswahrscheinlichkeit

$$\bar{K}(v, B) = \sum_{i=1}^N p_i \delta_{vK_i}(B)$$

definiert wird, wobei  $B$  Borelmenge in  $\mathcal{M}_1(S)$  ist und  $\sum_{i=1}^N p_i = 1$ ,  $p_i > 0$  (siehe Definition 3.1.5).

Der Prozeß bewegt sich von  $v$  nach  $vK_i$  durch zufälliges Auswählen eines Index  $i$  gemäß der durch die  $p_i$  festgelegten Verteilung auf den Indizes. Durch die Folge von Indizes ist bei gegebenem Startpunkt die Trajektorie eindeutig festgelegt.

In Satz 3.2.1 wurde gezeigt, daß es für den Prozeß ein eindeutiges invariantes Maß  $\bar{\mu} \in \mathcal{M}_1(\mathcal{M}_1(S))$  gibt, wenn die  $\bar{K}_i$  im Schnitt kontraktiv sind (siehe Definition 3.1.6). Dann gilt also für  $\bar{\mu}$ :

$$\int \bar{\mu}(B) d\bar{\mu}(v) = \int \bar{K}(v, B) d\bar{\mu}(v) = \bar{\mu}(B) \quad \text{für } v \in \mathcal{M}_1(S),$$

alle Borelmengen  $B \subset \mathcal{M}_1(S)$ , und  $\int \bar{\mu} dV^n \bar{\lambda}$  konvergiert schwach gegen  $\bar{\mu}$  für alle Anfangsverteilungen  $\bar{\lambda} \in \mathcal{M}_1(\mathcal{M}_1(S))$ , d.h.

$$\int \bar{f} dV^n \bar{\lambda} \rightarrow \int \bar{f} d\bar{\mu}$$

für alle beschränkten stetigen Funktionen  $\bar{f}$  auf  $\mathcal{M}_1(S)$ .

Wir wollen zeigen, daß beim Start in beliebigem  $v \in \mathcal{M}_1(S)$  die Trajektorien des Prozesses fast sicher in Verteilung gegen  $\bar{\mu}$  konvergieren. Das heißt, daß für fast alle Trajektorien

$v, v_1, v_2, \dots$  des in  $v = v_0$  startenden Prozesses die Zeitmittel  $\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \bar{f}(v_k)$  gegen  $\int \bar{f} d\bar{\mu}$  konvergieren für alle beschränkten stetigen  $\bar{f}$ , bzw. die empirische Verteilung

$$\bar{\rho}_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \delta_{v_k}$$

einer Trajektorie  $(v, v_1, v_2, v_3, \dots)$  schwach gegen  $\bar{\mu}$  konvergiert.

Mit dem Birkhoffschen Ergodensatz erhalten wir für einen ergodischen Prozeß die Konvergenz der Zeitmittel gegen die Raummittel:

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \bar{f} \circ T^k(v) \rightarrow \int \bar{f} d\bar{\mu} \quad \bar{\mu} \text{- f.s.} \quad (*), \quad T^k(v) = \bar{Z}_k^v(\hat{\omega}) \quad (\text{siehe Definition 3.1.4}).$$

$T^k(v)$  kennzeichnet den Aufenthaltsort der Trajektorie zum Zeitpunkt  $k$ .

Mit (\*) und Lemma 1 erhalten wir zunächst für  $\bar{\mu}$ -f.a. Startpunkte  $v \in \mathcal{M}_1(S)$  und fast alle Trajektorien die gewünschte schwache Konvergenz der empirischen Verteilungen gegen das invariante  $\bar{\mu}$ . Dabei ergibt sich die Einschränkung auf  $\bar{\mu}$ -f.a. Startpunkte daraus, daß für die Konvergenz der Zeitmittel gegen die Raummittel Ergodizität von  $\bar{\mu}$  gefordert wird. Diese wiederum basiert darauf, daß die Startpunkte  $v$   $\bar{\mu}$ -verteilt sind (siehe Lemma 1).

Die Aussage "für fast alle Trajektorien" folgt aus der  $\bar{\mu}$ -f.s. Konvergenz im Ergodensatz und aus der Darstellung von

$$\bar{\mu}(B) = P_{\Omega} \phi_v^{-1}(B), \quad B \in \mathcal{M}_1(S) \quad (\text{siehe Satz 3.2.1}).$$

Das Hauptargument für die schwache Konvergenz der empirischen Verteilung der Trajektorie gegen  $\bar{\mu}$  für beliebigen Startpunkt  $v \in \mathcal{M}_1(S)$  ist, daß der Abstand der Trajektorien zweier verschiedener Startpunkte (z.B. einer auf dem Attraktor, einer außerhalb), auf die die gleichen Abbildungen angewandt werden, gegen 0 konvergiert und sich daher Kenntnisse über die Eigenschaften der einen Trajektorie in geeigneter Weise auf die andere übertragen lassen, wenn die iterativ angewandten Abbildungen im Schnitt kontraktiv sind.

Das Kapitel basiert auf [E].

Einige spezielle Überlegungen waren nötig, da hier ein Raum von Wahrscheinlichkeitsmaßen, versehen mit der Wasserstein - Metrik, zugrunde liegt.

### Definition 1

Wenn  $\{Z_n\}$  Markov - Prozeß auf dem meßbaren Raum  $(X, \mathcal{F})$  ist,  $\mu$  invariantes Maß für den Prozeß und  $Z_0$  ist  $\mu$ -verteilt, dann ist  $\{Z_n\}$  *stationärer stochastischer Prozeß*. Eine Menge  $A \in \mathcal{F}_\infty$  heißt *shift-invariant*, wenn es ein  $C \in \mathcal{F}_\infty$  gibt, so daß

$A = \{ (Z_k, Z_{k+1}, \dots) \in C \}$  für alle  $k \geq 0$ , wobei  $\mathcal{F}_\infty$  die  $\sigma$ - Algebra der meßbaren Zylinder

in  $X^\infty$  ist. Sei  $J$  die  $\sigma$ - Algebra der shift-invarianten Ereignisse. Der Prozeß  $\{Z_n\}$  heißt *ergodisch*, wenn für jedes  $A \in J$   $P(A) = 0$  oder  $P(A) = 1$  ist.

### Lemma 1

Wenn  $\mu$  eindeutiges stationäres Maß für den stationären Markov - Prozeß  $\{Z_n\}$  ist, und  $Z_0$  ist  $\mu$ -verteilt, dann ist  $\{Z_n\}$  ergodisch.

Beweis (vgl. [E]):

Wenn der Prozeß  $\{Z_n\}$  nicht ergodisch ist, so existiert ein  $A \in J$  mit  $0 < P(A) < 1$ . Da  $A$  invariant ist, existiert ein  $C \in \mathcal{F}$ , so daß  $A = \{Z_n \in C\}$  fast sicher für alle  $n \geq 0$ .

Sei

$$\nu(B) = \frac{\mu(B \cap C)}{\mu(C)} \quad \text{und} \quad \lambda(B) = \frac{\mu(B \cap C^c)}{\mu(C^c)}$$

wobei  $C^c = S \setminus C$  das Komplement von  $C$  in  $S$  ist.

Damit ist  $\mu(C) = P(\{Z_0 \in C\}) = P(\{Z_n \in C\}) = P(A) > 0$

$$\begin{array}{ccc} | & | & | \\ \mu \text{ Startverteilung} & \{Z_n\} \text{ invariant} & \text{Definition von } A \end{array}$$

und  $\mu(C) = P(A) < 1$ , d.h.  $\mu(C^c) > 0$ .

Also gilt  $\mu = \mu(C) \cdot \nu + \mu(C^c) \cdot \lambda$ , so daß zu zeigen bleibt, daß  $\nu$  und damit  $\lambda$  eine stationäre Anfangsverteilung ist.

$$\begin{aligned} \nu(B) &= \frac{\mu(B \cap C)}{\mu(C)} \\ &= \frac{P(Z_1 \in B \cap C)}{\mu(C)} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{P((Z_1 \in B) \cap (Z_1 \in C))}{\mu(C)} \\
&= \frac{P((Z_1 \in B) \cap (Z_0 \in C))}{\mu(C)} \\
&= \frac{1}{\mu(C)} \int_C P(Z_1 \in B | Z_0 = z) \, d\mu(z) \\
&= \frac{1}{\mu(C)} \int_C p(z, B) \, d\nu(z).
\end{aligned}$$

Die letzte Gleichung ergibt sich aus  $\frac{d\nu}{d\mu} = \frac{1}{\mu(C)} \mathbb{I}_C$ .

Also ist  $\nu$  und damit  $\lambda$  invariant, d.h.  $\mu = \nu$  oder  $\mu = \lambda$  wegen der Eindeutigkeit von  $\mu$ . Also ist  $\mu(C) = 0$  oder  $\mu(C) = 1$ ; im Widerspruch zur Voraussetzung ist somit  $P(A) = 0$  oder  $P(A) = 1$ . Also ist  $\{Z_n\}$  ergodisch. ■

### Satz 1

Sei  $r < 1$ , so daß

$$\prod_{i=1}^N d_w(\nu K_i, \lambda K_i)^{p_i} \leq r \cdot d_w(\nu, \lambda) \quad \forall \nu, \lambda \in \mathcal{M}_1(S).$$

Sei  $0 < \delta := \min_{1 \leq i \leq n} p_i$  und sei  $\bar{\mu}$  das eindeutige invariante Maß des oben beschriebenen

Markov - Prozesses  $\bar{Z}_n^V(\hat{i})$ .

Dann existiert  $M \subset \Omega$ ,  $P_{\Omega}(M) = 1$ , so daß für jedes  $\nu \in \mathcal{M}_1(S)$

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \bar{f}(\nu K_{i_1} K_{i_2} \dots K_{i_k}) \rightarrow \int \bar{f} d\bar{\mu}$$

für  $\hat{i} = (i_1, i_2, \dots) \in M$  und für alle  $\bar{f} \in \mathcal{C}_b(\mathcal{M}_1(S))$  gilt. Das bedeutet, daß  $P_{\Omega}$ -fast alle Trajektorien mit Start in beliebigem  $\nu \in \mathcal{M}_1(S)$  in Verteilung gegen  $\bar{\mu}$  konvergieren.

Beweis :

Der Satz wird bewiesen mit Hilfe von Lemma 2.

### Lemma 2

Seien  $\nu, \lambda \in \mathcal{M}_1(S)$ ,  $\nu \neq \lambda$ , es gelten die Voraussetzungen des Satzes. Wie in Definition 3.1.4

sei  $\bar{Z}_n^{\nu}(\hat{i}) = \nu K_{i_1} K_{i_2} \dots K_{i_n}$  und  $\eta < 1$ ,  $r_1 < 1$ .

Dann ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_w(\bar{Z}_n^{\nu}, \bar{Z}_n^{\lambda}) = 0 \quad P_{\Omega}\text{-f.s.}$$

Beweis :

Wir folgen dem Beweis von Satz 3.2.1 und erhalten so:

$$P_{\Omega}\left(d_w(\bar{Z}_n^{\nu}, \bar{Z}_n^{\lambda}) > \eta^n d_w(\nu, \lambda)\right) < r_1^n$$

Sei  $C = \max_{1 \leq i \leq N} (d_w(\nu, \nu K_i))$ , dann gilt

$$P_{\Omega}\left(d_w(\bar{Z}_n^{\nu}, \bar{Z}_n^{\lambda}) > \eta^n \cdot C\right) < r_1^n.$$

Es ist  $r_1 < 1$ , also  $\sum_{n=0}^{\infty} r_1^n = 1 + \frac{1}{1-r_1} < \infty$ .

Also ist  $\sum_{n=0}^{\infty} P_{\Omega}\left(d_w(\bar{Z}_n^{\nu}, \bar{Z}_n^{\lambda}) > \eta^n \cdot C\right) < \infty$ , und mit dem Lemma von Borel - Cantelli gilt:

$d_w(\bar{Z}_n^{\nu}, \bar{Z}_n^{\lambda}) \leq \eta^n \cdot C$  für ausreichend große  $n$   $P_{\Omega}$ -f.s., also  $\lim_{n \rightarrow \infty} d_w(\bar{Z}_n^{\nu}, \bar{Z}_n^{\lambda}) = 0$   $P_{\Omega}$ -f.s. ■

Beweis des Satzes :

Sei  $\{\bar{Z}_n\}$  unser Prozeß,  $\bar{Z}_0$  sei  $\bar{\mu}$ -verteilt. Dann ist der Prozeß stationär, weil  $\bar{\mu}$  invariantes Maß ist und ergodisch mit Lemma 1, weil  $\bar{\mu}$  eindeutig ist. Sei  $\bar{f} \in \mathcal{C}_b(\mathcal{M}_1(S))$  gleichmäßig stetig und

$$B := \left\{ (v_0, v_1, \dots) : \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \bar{f}(v_k) \rightarrow \int \bar{f} d\bar{\mu} \right\}.$$

Dabei ist  $v_k = v_0 K_{i_1} K_{i_2} \dots K_{i_k}$  der Aufenthaltsort der Trajektorie zum Zeitpunkt  $k$ .

Mit dem Birkhoffschen Ergodensatz und der Ergodizität von  $\{\bar{Z}_n\}$  gilt

$P((\bar{Z}_0, \bar{Z}_1, \dots) \in B) = 1$ . Nun

$$\begin{aligned} 1 &= P((\bar{Z}_0, \bar{Z}_1, \dots) \in B) \\ &= \int P((\bar{Z}_0, \bar{Z}_1, \dots) \in B \mid \bar{Z}_0 = v) d\bar{\mu}(v) \\ &= \int P_{\Omega}((i_1, i_2, \dots) : (v, vK_{i_1}, vK_{i_1}K_{i_2}, \dots) \in B) d\bar{\mu}(v), \end{aligned}$$

wobei sich das letzte Gleichheitszeichen aus der Definition von  $P_{\Omega}$  ergibt (siehe Definition 3.1.4).

Es gibt also ein  $v_0 \in \mathcal{M}_1(S)$  mit

$$P_{\Omega}((i_1, i_2, \dots) : (v_0, v_0 K_{i_1}, v_0 K_{i_1} K_{i_2}, \dots) \in B) = 1,$$

also einen Startpunkt (im Raum der Maße auf  $S$ ), dessen Trajektorien  $P_{\Omega}$ -f.s. in Verteilung gegen  $\bar{\mu}$  konvergieren.

Sei  $G = \{(i_1, i_2, \dots) : (v_0, v_0 K_{i_1}, v_0 K_{i_1} K_{i_2}, \dots) \in B\}$ , dann ist  $P_{\Omega}(G) = 1$  und für

$(i_1, i_2, \dots) \in G$  ist

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \bar{f}(v_0 K_{i_1} \dots K_{i_k}) \rightarrow \int \bar{f} d\bar{\mu}.$$

Mit Lemma 2 nähern sich die Trajektorien zweier verschiedener Startpunkte bei Anwendung der gleichen Kerne  $K_{i_1} P_\Omega$ -f.s. an, d.h. mit der gleichmäßigen Stetigkeit von  $\bar{f}$  existiert für jedes  $\lambda \in \mathcal{M}_1(S)$  ein  $H$  mit  $P_\Omega(H) = 1$ , so daß für  $(i_1, i_2, \dots) \in H$  und  $n \rightarrow \infty$  gilt

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (\bar{f}(v_0 K_{i_1} \dots K_{i_k}) - \bar{f}(\lambda K_{i_1} \dots K_{i_k})) \rightarrow 0.$$

Also gilt für  $(i_1, i_2, \dots) \in G \cap H$

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \bar{f}(\lambda K_{i_1} \dots K_{i_k}) \rightarrow \int \bar{f} d\bar{\mu}$$

und  $P_\Omega(G \cap H) = 1$ .

Mit  $\lambda_k = \lambda K_{i_1} \dots K_{i_k}$  und  $\bar{\rho}_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \delta_{\lambda_k}$  gilt also  $\int \bar{f} d\bar{\rho}_n \rightarrow \int \bar{f} d\bar{\mu}$   $P_\Omega$ -f.s..

Bisher hingen  $G$  und  $H$  von  $\bar{f}$  ab. Da  $\mathcal{M}_1(S)$  polnisch ist, existiert eine Folge  $(\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3, \dots)$  gleichmäßig stetiger Elemente von  $\mathcal{C}_b(\mathcal{M}_1(S))$ , so daß aus

$\int \bar{f}_k d\bar{\rho}_n \rightarrow \int \bar{f}_k d\bar{\mu}$   $P_\Omega$ -f.s. für  $n \rightarrow \infty$  und  $k=1, 2, 3, \dots$  die schwache Konvergenz der empirischen Verteilung  $\bar{\rho}_n$  gegen das invariante Maß  $\bar{\mu}$   $P_\Omega$ -f.s. folgt ([PA], S.47). ■

### 3.4 Ergodensatz für iterierte Kerne

Ziel dieses Kapitels ist es, die bisher gewonnenen Erkenntnisse über sich in  $\mathcal{M}_1(S)$

bewegende Trajektorien zu verwenden, um Aussagen über verwandte Trajektorien in  $S$  zu machen, die durch die zufällige Auswahl von Kernen entstehen. Dabei besteht die Schwierigkeit darin, einen geeigneten Zusammenhang zwischen den Geschehnissen auf beiden Räumen herzustellen, zumal in unserem Modell eine Trajektorie in  $\mathcal{M}_1(S)$

eindeutig bestimmt wird vom Startpunkt und den zufälligen Transformationen, in  $S$  jedoch noch ein Zufall durch die Kerne hinzukommt.

Zunächst (Satz 1, Lemma 1, Lemma 2) können wir zeigen, daß es für den uns interessierenden Prozeß auf  $S$  ein eindeutiges invariantes attraktives Maß gibt, das sich aus dem eindeutigen invarianten Maß des korrespondierenden Prozesses auf  $\mathcal{M}_1(S)$  als Intensitätsmaß ergibt. Dann (Lemma 3, Lemma 4) konstatieren wir die Übertragbarkeit zweier Aussagen über asymptotisches Verhalten vom in den Kapiteln 3.2 und 3.3 betrachteten Prozeß auf  $\mathcal{M}_1(S)$  auf den Prozeß auf  $S$ . Schließlich (Lemma 5) gelangen wir mit einem Martingalargument zur Kernaussage der Arbeit (Satz 2): Unter gewissen Voraussetzungen konvergiert die empirische Verteilung eines durch zufällige Auswahl von Kernen gegebenen Prozesses gegen das für den Prozeß eindeutige attraktive invariante Maß für beliebigen Startpunkt.

#### Definition 1

Der durch  $K(x, \cdot) = \sum_{i=1}^N p_i K_i(x, \cdot)$  auf  $S$  gegebene Markov - Prozeß mit Start in  $x \in S$  wird definiert als

$$Z_n^x: \bar{\Omega} \rightarrow S, \quad Z_n^x(\bar{\omega}) = x_n \quad \text{mit } \bar{\omega} := (\bar{x}, \hat{i}) = (x_1, x_2, \dots, i_1, i_2, \dots) \in \bar{\Omega} := S^{[0, 1, \dots]} \times \Omega,$$

$n \in \mathbb{N}$ ,  $x \in S$ ,  $x_n$  ist der Aufenthaltsort der Trajektorie zum Zeitpunkt  $n$ .

Außerdem wird definiert  $Z_n^{*x}: S^{[0, 1, \dots]} \rightarrow S, Z_n^{*x}(\bar{x}) = x_n, n \in \mathbb{N}, x \in S, \hat{i} \in \Omega$ .

Mit dem Satz von Ionescu - Tulcea existiert die Verteilung  $P_x$  auf  $\bar{\Omega}$  der Markovkette  $Z_n^x(\bar{\omega})$

mit Start in  $x$  und Bewegungsgesetz  $K(x, \cdot)$  wie oben und ein Maß  $P_{x, \hat{i}}$  auf  $S^{[0, 1, 2, \dots]}$  für

den Prozeß  $Z_n^{*x}(\bar{x})$  mit  $P_{x, \hat{i}}^0 = \delta_x, P_{x, \hat{i}}^1 = \delta_x \otimes K_{i_1}, P_{x, \hat{i}}^n = P_{x, \hat{i}}^{n-1} \otimes K_{i_n}$  für festes  $\hat{i}$

(vgl. [S], S. 259).

### Bemerkung 1

$Z_n^x(\omega)$  ist der auf  $S$  durch  $K(x, \cdot) = \sum_{i=1}^N p_i K_i(x, \cdot)$  gegebene Prozeß. Über sein asymptotisches Verhalten Aussagen zu machen, ist das Ziel dieser Arbeit. Die Bewegung von  $x_{n-1}$  nach  $x_n$  hängt ab von  $i_n$ , also davon, welcher der Kerne  $K_i$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ , gewählt wurde und vom inhärenten Zufall der Kerne  $K_{i_n}$ ,  $i_n \in \{1, 2, \dots, N\}$ .

Den Prozeß  $Z_n^{*x}(\bar{x})$  brauchen wir im Beweis von Lemma 2 und Lemma 5.  $Z_n^{*x}(\bar{x})$  beschreibt für festes  $\hat{i} \in \Omega$  und festen Startpunkt  $x$  eine Trajektorie, die nur vom Zufall im Kern  $K_{i_j}$  abhängt. Beide Prozesse können die gleiche Trajektorie haben, aber  $Z_n^x(\omega)$  wird definatorisch als homogene Markovkette mit Übergangskern  $K(x, \cdot)$  zu jeder Zeit,  $Z_n^{*x}(\bar{x})$  als inhomogene Markovkette angesehen, deren Übergangskern  $K_{i_j}(x, \cdot)$  ( $1 \leq i_j \leq N$ ) zur Zeit  $j$  bestimmt wird von einem festen  $\hat{i} = (i_1, i_2, i_3, \dots)$ .

### Satz 1

Das gesuchte eindeutige invariante attraktive Maß  $\mu$  für den Prozeß  $Z_n^x(\omega)$  auf  $S$  ergibt sich aus  $\bar{\mu}$  aus Satz 3.2.1 als Intensitätsmaß

$$\mu(A) := \int \nu(A) \bar{\mu}(d\nu).$$

Beweis :

Der Satz wird bewiesen mit den folgenden Lemmata 1 und 2.

### Lemma 1

Sei  $K$  Übergangskern für den Prozeß  $Z_n^x(\omega)$  aus Definition 1,  $\mu$  wie in Satz 1. Dann ist  $\mu$  invariant bezüglich  $K$ .

Beweis :

$$\mu K(A) = \int K(x, A) \mu(dx)$$

mit Definition von  $\mu$   $= \int \left[ \int v(dx) K(x, A) \right] \bar{\mu}(dv)$

mit Definition von  $K$   $= \int \left[ \int v(dx) \sum_{i=1}^N p_i K_i(x, A) \right] \bar{\mu}(dv)$

$$= \int \sum_{i=1}^N p_i (v K_i)(A) \bar{\mu}(dv)$$

lften ( $[...] \neq 0$  für  $\lambda = v K_i$ )  $= \int \sum_{i=1}^N p_i \left[ \int \lambda(A) \delta_{v K_i}(d\lambda) \right] \bar{\mu}(dv)$

$$= \int \left[ \int \sum_{i=1}^N p_i \lambda(A) \delta_{v K_i}(d\lambda) \right] \bar{\mu}(dv)$$

mit Definition von  $\bar{K}$   $= \int \left[ \int \lambda(A) \bar{K}(v, d\lambda) \right] \bar{\mu}(dv)$

mit Invarianz von  $\bar{\mu}$   $= \int \lambda(A) \bar{\mu}(d\lambda)$

$$= \mu(A) \quad \blacksquare$$

## Definition 2

Seien  $f \in \mathcal{C}_b(S)$ ,  $\nu \in \mathcal{M}_1(S)$ , dann wird durch

$$\bar{f}(\nu) := \int_S f(x) \, d\nu$$

eine stetige beschränkte Funktion auf  $\mathcal{M}_1(S)$  definiert.

## Bemerkung 2

Wenn  $\bar{f} \in \mathcal{C}_b(\mathcal{M}_1(S))$  wie in Definition 2 ist, gilt mit  $\int f \, d(\nu K) = \int (Kf) \, d\nu$

$$\begin{aligned} \bar{f}\left(\delta_x K_{i_1} K_{i_2} \dots K_{i_j}\right) &= \int f \, d\left(\delta_x K_{i_1} K_{i_2} \dots K_{i_j}\right) \\ &= \left(K_{i_1} K_{i_2} \dots K_{i_j} f\right)(x). \end{aligned}$$

Außerdem gilt mit der Definition von  $\bar{\mu}$ , wenn  $\bar{f}$  wie in Definition 2 ist

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{M}_1(S)} \bar{f} \, d\bar{\mu} &= \int_{\mathcal{M}_1(S)} \left[ \int_S f \, d\nu \right] d\bar{\mu} \\ &= \int_S f \, d\mu. \end{aligned}$$

Damit läßt sich über die spezielle Form der  $\bar{f}$  eine Beziehung herstellen zwischen dem bekannten Geschehen auf  $\mathcal{M}_1(S)$  und dem uns interessierenden auf  $S$ . Das werden wir in den Lemmata 3 und 4 noch verwenden, indem wir Aussagen für  $\bar{f} \in \mathcal{C}_b(\mathcal{M}_1(S))$  aus Kapitel 3.3 betrachten und mit Hilfe dieser Bemerkung modifizieren.



## Lemma 2

$\mu$  aus Satz 1 ist attraktiv für den Prozeß  $Z_n^x(\bar{\omega})$  und eindeutig.

Beweis :

$P_\Omega$  ist Maß auf dem Adreßraum  $\Omega$  wie in Definition 3.1.4,  $P_x$  und  $P_{x,i}$  sind wie in

Definition 1,  $\bar{f}$  ist wie in Definition 2. Satz 3.2.1 macht eine Aussage über die Attraktivität des invarianten Maßes auf  $\mathcal{M}_1(S)$  :

$$E \left[ \bar{f} \left( \bar{Z}_n^v \right) \right] \rightarrow \int \bar{f} \, d\bar{\mu} \quad \forall v \quad \forall \bar{f} \in \mathcal{C}_b(\mathcal{M}_1(S)).$$

Wir verwenden die spezielle Form von  $\bar{f}$ , um die obige Konvergenzaussage in die gewünschte Konvergenzaussage für die Attraktivität von  $\mu$  umzuformen.

Für  $v = \delta_x$  ist

$$\begin{aligned} E_{P_\Omega} \left[ \bar{f} \left( \bar{Z}_n^x \right) \right] &= E_{P_\Omega} \left[ \int f \, d(\delta_x K_{i_1} K_{i_2} \dots K_{i_n}) \right] \\ &= E_{P_\Omega} \left[ \left( K_{i_1} K_{i_2} \dots K_{i_n} f \right) (x) \right] \\ &= E_{P_\Omega} \left[ E_{P_{x,i}} \left[ f \left( Z_n^{*x} \right) \right] \right] \\ &= E_{P_x} \left[ f \left( Z_n^x \right) \right]. \end{aligned}$$

Damit haben wir eine Transformation des linken Teils der Konvergenzaussage auf den Raum  $S$  erreicht.

Wir verwenden noch einmal Bemerkung 2 für den rechten Teil der Konvergenzaussage und erhalten:

$$E \left[ f \left( Z_n^x \right) \right] \rightarrow \int f \, d\mu \quad \forall x \quad \forall f \in \mathcal{C}_b(S), \quad \text{d.h. } \mu \text{ ist attraktiv.}$$

Die Eindeutigkeit folgt aus der Attraktivität.

**Lemma 3**

Sei  $\mu$  wie in Satz 1, seien  $K_1, K_2, \dots, K_N$  im Schnitt kontraktive Kerne (siehe Definition 3.1.6),  $P_\Omega$  wie in Definition 3.1.4, dann gilt für alle  $x \in S$  für  $n \rightarrow \infty$ :

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (K_{i_1} K_{i_2} \dots K_{i_j} f)(x) \rightarrow \int f \, d\mu \quad \forall f \in \mathcal{O}_b(S) \quad P_\Omega \text{-f. s.}$$

**Beweis :**

Mit Satz 3.3.1 erhalten wir eine Konvergenzaussage auf  $\mathcal{M}_1(S)$ :

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \bar{f}(\delta_x K_{i_1} K_{i_2} \dots K_{i_j}) \rightarrow \int \bar{f} \, d\bar{\mu} \quad \forall \bar{f} \in \mathcal{O}_b(\mathcal{M}_1(S)) \quad P_\Omega \text{-f. s.}$$

Die gewünschte Aussage folgt wie in Lemma 2 mit Bemerkung 2 unter Verwendung der speziellen Gestalt der  $\bar{f}$  aus Definition 2. ■

**Lemma 4**

Seien  $K_1, K_2, \dots, K_N$  im Schnitt kontraktive Kerne,  $P_\Omega$  wie in Definition 3.1.4. Sei

$f \in \mathcal{O}_b(S)$  gleichmäßig beschränkt,  $\bar{f}(v) := \int_S f(x) \, dv$  wie in Definition 2, dann gilt für

alle  $x, y \in S$  für festes  $k$ , für  $n \rightarrow \infty$ :

$$\frac{1}{n} \sum_{j=k}^n (K_{i_{j-k+1}} \dots K_{i_j} f)(y) - (K_{i_1} \dots K_{i_j} f)(x) \rightarrow 0 \quad P_\Omega \text{-f. s.}$$

**Beweis :**

Sei

$$\begin{aligned} L_n &:= \frac{1}{n} \sum_{j=k}^n \left( \bar{f}(\delta_y K_{i_{j-k+1}} \dots K_{i_j}) - \bar{f}(\delta_x K_{i_1} \dots K_{i_j}) \right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=k}^n \left( K_{i_{j-k+1}} \dots K_{i_j} f \right)(y) - \left( K_{i_1} \dots K_{i_j} f \right)(x). \end{aligned}$$

Die Gleichheit gilt mit Bemerkung 2.

Mit Lemma 3.3.2 ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_w(\bar{Z}_n^\nu, \bar{Z}_n^\lambda) = 0 \quad P_\Omega\text{-f.s.},$$

d.h., daß für zwei verschiedene Startpunkte  $\nu$  und  $\lambda$  in  $\mathcal{M}_1(S)$ , auf die die gleichen im Schnitt kontraktiven Transformationen angewandt werden, eine Annäherung der Trajektorien  $\bar{Z}_n^\nu(\hat{i})$  und  $\bar{Z}_n^\lambda(\hat{i})$   $P_\Omega$ -f. s. gewährleistet ist. Mit der gleichmäßigen Stetigkeit von  $f \in \mathcal{C}_b(S)$  für  $\lambda = \delta_y$  und  $\nu = \delta_x K_1 K_2 \dots K_{j-k}$  erhalten wir das gewünschte Ergebnis. ■

### Lemma 5

Seien  $Z_n^{*x}(\bar{x})$  und  $P_{x,\hat{i}}$  wie in Definition 1,  $K_1, K_2, \dots, K_N$  im Schnitt kontraktive Kerne, dann gilt für festes  $k$ :

$$\frac{1}{n} \sum_{j=k}^n \left( f(Z_j^{*x}(\bar{x})) - (K_{j-k+1} K_{j-k+2} \dots K_j f)(Z_{j-k}^{*x}(\bar{x})) \right) \rightarrow 0 \quad P_{x,\hat{i}}\text{-f.s.}$$

Beweis:

Sei

$$M_n := \sum_{j=1}^n \left( f(Z_j^{*x}(\bar{x})) - (K_j f)(Z_{j-1}^{*x}(\bar{x})) \right),$$

wobei  $\mathcal{A}_n^x = \sigma(Z_0^{*x}, Z_1^{*x}, \dots, Z_n^{*x})$  die  $\sigma$ -Algebra der bis zum Zeitpunkt  $n$  beobachtbaren

Ereignisse und  $\mathcal{A}^x = \left( \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{A}_n^x \right)$  ist.

Dann ist  $M_n$  beschränktes Martingal, daher gilt (vgl. [FK], S.15):

$$\frac{1}{n} M_n \rightarrow 0 \quad P_{x,\hat{i}}\text{-f.s.}$$

Nun können wir iterieren: Zunächst erhalten wir sofort

$$\frac{1}{n} \sum_{j=2}^n \left( f(Z_j^{*x}(\bar{x})) - (K_j f)(Z_{j-1}^{*x}(\bar{x})) \right) \rightarrow 0 \quad P_{x,\hat{i}}\text{-f.s.} \quad (*)$$

Da  $K_i$  Feller ist für alle  $i \in \{1, \dots, N\}$ , ist auch

$$M_n^* := \sum_{j=2}^n \left( (K_{i_j} f)(Z_{j-1}^{*x}(\bar{x})) - (K_{i_{j-1}} K_{i_j} f)(Z_{j-2}^{*x}(\bar{x})) \right)$$

beschränktes Martingal, und wie oben gilt

$$\frac{1}{n} M_n^* \rightarrow 0 \quad P_{x, \hat{\mu}} \text{-f.s.} \quad (+)$$

und mit (\*) und (+) auch

$$\frac{1}{n} \sum_{j=2}^n \left( f(Z_j^{*x}(\bar{x})) - (K_{i_{j-1}} K_{i_j} f)(Z_{j-2}^{*x}(\bar{x})) \right) \rightarrow 0 \quad P_{x, \hat{\mu}} \text{-f.s.}$$

Durch weitere Iteration erhalten wir das gewünschte Ergebnis.  $\blacksquare$

## Satz 2

Seien die Voraussetzungen wie in Lemma 5,  $Z_n^x(\omega)$  und  $P_x$  wie in Definition 1. Dann gilt

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f(Z_j^x(\omega)) \rightarrow \int f \, d\mu \quad \forall f \in \mathcal{C}_b(S) \quad P_x \text{-f.s.}$$

für beliebigen Startpunkt  $x \in S$ .

**Beweis:**

Mit Lemma 4 und Lemma 5 erhalten wir für jedes  $x \in S$  und mit  $n \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left( f(Z_j^{*x}(\bar{x})) - (K_{i_1} K_{i_2} \dots K_{i_j} f)(x) \right) \rightarrow 0$$

für festes  $\hat{\mu} P_{x, \hat{\mu}}$  - f.s. und für  $P_\Omega$  - f.a.  $\hat{\mu}$  für alle gleichmäßig stetigen  $f \in \mathcal{C}_b(S)$ .

Mit Lemma 3 erhalten wir dann

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f(Z_j^{*x}(\bar{x})) \rightarrow \int f \, d\mu \quad (+)$$

ebenfalls für festes  $\hat{\mu} \in P_{X, \hat{\mu}}$  - f.s. und für  $P_\Omega$  - f.a.  $\hat{\mu}$  für alle gleichmäßig stetigen  $f \in \mathcal{C}_b(S)$ .

Es gibt also ein  $A \subset \Omega$  und ein  $B \subset S$ , für die (+) gilt und  $1 = P_\Omega(A) = P_X(S \times A)$  sowie  $1 = P_{X, \hat{\mu}}(B) = P_X(B \times \Omega)$ .

Daher ist  $0 = P_\Omega(A^c) = P_X(S \times A^c)$ , und es gilt mit  $P_X(B \times \Omega) = 1$ :

$$1 = P_X((B \times A) \cup (B \times A^c)) \leq P_X(B \times A) + P_X(B \times A^c), \text{ somit ist } P_X(B \times A) = 1.$$

(+) ist also äquivalent zu

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f(Z_j^x(\bar{\omega})) \rightarrow \int f \, d\mu \quad P_x \text{- f.s.}$$

für beliebigen Startpunkt  $x \in S$  für alle gleichmäßig stetigen  $f \in \mathcal{C}_b(S)$ .

Da  $S$  polnisch ist, können wir die Aussage mit den gleichen Argumenten wie am Ende von Kapitel 3.3 verallgemeinern auf alle  $f \in \mathcal{C}_b(S)$ . ■

### Korollar 1

Wenn  $B \subset S$   $\mu$ -randlos ist, d.h.  $\mu(\partial B) = 0$ , dann konvergiert die durchschnittliche Aufenthaltszeit der Trajektorie in  $B$  gegen  $\mu(B)$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#\{k: 0 \leq k \leq n, Z_k^x(\bar{\omega}) \in B\}}{n+1} = \mu(B) \quad P_x \text{- f.s.}$$

für beliebigen Startpunkt  $x \in S$ .

Mit dieser sich aus dem Portemanteau - Theorem ergebenden Aussage folgt, daß man auch in unserem Modell das invariante Maß praktisch "erzeugen" kann durch eine Trajektorie mit beliebigem Startpunkt.

### Bemerkung 3

Der in [BE] und [E] behandelte Fall einer Kollektion von im Schnitt kontraktiven Transformationen ergibt sich bei uns als Sonderfall  $K_i(x, \bullet) = \delta_{w_i x}$  für  $1 \leq i \leq N$ . Der von uns beschrittene Weg des Beweises über  $\mathcal{M}_1(S)$  ist dann ein gangbarer Umweg. Konkret ergibt sich in unserer Notation  $\bar{Z}_n^V(\hat{i}) = \delta_{w_n w_{n-1} \dots w_1 x}$ , d.h., daß der sich auf  $\mathcal{M}_1(S)$

bewegende Prozeß zu jeder Zeit ein Einpunktmass auf  $S$  repräsentiert mit Masse auf dem Punkt, in dem sich  $Z_n^X(\omega)$  zur gleichen Zeit befindet. Wie in der einführenden Betrachtung zu Systemen iterierter Funktionen läßt sich jeder Adresse  $\hat{i}$  eindeutig ein Punkt zuordnen, und zu Satz 2 kommen wir dann mit Lemma 3. Die in Lemma 4 und Lemma 5 angestellten Betrachtungen über den Zusammenhang zwischen dem bei Kenntnis von  $\hat{i}$  erwarteten und dem tatsächlichen Aufenthaltsort der Trajektorie erübrigen sich: die Aufenthaltsorte fallen zusammen.

### Bemerkung 4

Sind alle  $K_i$  strikt kontraktiv, vereinfacht sich der Beweis des Satzes erheblich.

In [BE] und [E] ist  $K(x, \bullet) = \sum_{i=1}^N p_i \delta_{w_i x}(\bullet)$  keine Transformation, der Beweis für  $K$  ist nicht analog dem Beweis einer Konvergenz für genau eine Transformation  $w$ . In der vorliegenden Arbeit jedoch ist  $K(x, \bullet) = \sum_{i=1}^N p_i K_i(x, \bullet)$ ,  $K$  ist strikt kontraktiv, wenn alle  $K_i$  strikt kontraktiv sind, und es muß nur noch ein Kern  $K = K_1$  mit  $p_1 = 1$  betrachtet werden. Dann fallen  $Z$ -Prozeß und  $Y$ -Prozeß zusammen, und aus dem zufälligen Prozeß in  $\mathcal{M}_1(S)$   $\bar{Z}_n^V(\hat{i}) = \nu K_{i_1} K_{i_2} \dots K_{i_n}$  wird der deterministische  $\bar{Z}_n^V(\hat{i}) = \nu K K \dots K = \nu K^n = \bar{Y}_n^V(\hat{i})$  der wegen der strikten Kontraktivität von  $K$  für beliebigen Startpunkt  $\nu \in \mathcal{M}_1(S)$  konvergiert gegen  $\mu \in \mathcal{M}_1(S)$  nicht mehr nur  $P_\Omega$ -f.s., sondern für alle  $\hat{i}$ . Das invariante Maß auf  $\mathcal{M}_1(S)$  ergibt sich so als  $\bar{\mu} = \delta_\mu$ .

Dann werden Lemma 3 und Lemma 4 aus diesem Kapitel gegenstandslos, und wir kommen zu Satz 2 allein mit Lemma 5.

## 4. Literaturverzeichnis

- [BE] BARNESLEY, M. AND ELTON (1988) A New Class of Markov Processes for Images Encoding, *Journal of Applied Probability* 20, 14-32.
- [B] BARNESLEY, M. (1988) *Fractals Everywhere*, Academic Press.
- [B-SFI] BARNESLEY, M. (1988) Fractal modelling of real world images, in *The Science of Fractal Images*, by H.O. Peitgen and D. Saupe Edit., Springer Verlag.
- [BD] BARNESLEY, M. AND DEMKO, S. (1985) Iterated function systems and the global construction of fractals, *Proc. R. Soc. London A* 399, 243-275
- [BDEG] BARNESLEY, M., DEMKO, S., ELTON, J. AND GERONIMO, J. Invariant measures for Markov processes arising from iterated function systems with place-dependent probabilities, *Ann. Inst. Henri Poincaré* 24, 367-394.
- [BDEG-E] BARNESLEY, M., DEMKO, S., ELTON, J. AND GERONIMO, J. Erratum Invariant measures for Markov processes arising from iterated function systems with place-dependent probabilities, *Ann. Inst. Henri Poincaré* 25, 589-590.
- [BF] BICKEL, P. J. AND FREEDMAN, D. A. (1981) Some asymptotic theory for the bootstrap. *Ann. Statist.* 9, 1196-1217
- [BR] BREIMAN, L. (1968) *Probability*. Addison-Wesley, Reading, Mass.
- [C] COHN, D. L. (1980) *Measure Theory*, Birkhäuser
- [DS] DIACONIS, P. AND SHAHSHAHANI, M. (1986) Products of random matrices and computer image generation. *Contemporary Math.* 50, 173-182.
- [DF] DUBINS, L. E. AND FREEDMAN, D. A. (1966) Invariant probabilities for certain Markov processes. *Ann. Math. Statist.* 32, 837-848.
- [DO] DOBRUSHIN, R. L. (1970) Prescribing a system of random variables by conditional distributions. *Theory Prob. Applications* 15, 458-486.
- [DU] DUDLEY, R. M. (1968) Distances of probability measures and random variables, *Ann. Math. Statistic* 39, 1563-1572.
- [E] ELTON, J. (1987) An ergodic theorem for iterated maps, *Ergod. Th. and Dynam. Sys.* 7, 481-488.
- [EK] ETHIER, S. N. AND KURTZ, T. G. (1986) *Markov Processes, Characterization and Convergence*, John Wiley and Sons.
- [F] FÖLLMER, H., Vorlesungen zur Wahrscheinlichkeitstheorie I-IV, 1988-90
- [FK] FURSTENBERG, H. AND KIFER, Y. (1983) Random matrix products, *Isr. J. Math.* 46, 14-32.
- [G] GRAF, S. (1992) Barnsley's Scheme for the Fractal Encoding of Images. *Journal of Complexity* 8, 72-78

- 
- [H] HUTCHINSON, J. (1981) Fractals and self-similarity. *Indiana U. J. Math.* 30, 713-747.
- [P] PROKHOROV, YU. V. (1956) Convergence of random processes and limit theorems in probability theory, *Theory Prob. Applications* 1, 157-214.
- [PA] PARTHASARATHY, K. R. (1967) *Probability Measures on Metric Spaces*. New York
- [S] SIRJAEV, A.N. (1987) *Wahrscheinlichkeit*. Ost-Berlin
- [V] VALLENDER, S. S. (1973) Calculation of the Wasserstein distance between probability distributions on the line. *Theory Probab. Appl.* 18, 784-786.



## A. Programmbeschreibungen

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurden von uns zwei Programme erstellt, auf die wir im folgenden eingehen wollen. Die Funktionen der Programme sind so gewählt, daß die wichtigsten Punkte der Arbeit unterstützende Anschauung erfahren. Auch wird ein Ausblick auf die im Rahmen dieser Arbeit nicht untersuchten praktischen Anwendungen der iterierten Funktionensysteme gegeben: Die Komprimierung von Bildern, insbesondere auch dreidimensional, sowie die Konstruktion der zur Komprimierung notwendigen affinen Abbildungen.

Die Programme decken die Rechnersysteme SGI Indigo, Atari ST/TT, PC und Apple Macintosh ab.

### A.1 Version für SGI Indigo, Atari ST/TT und PC

Die Programme für die SGI Indigo, Atari ST/TT und PC wurden in C (MIPS C, PureC und ZORTECH C++) geschrieben; der Quelltext ist für alle Versionen identisch. Ebenso wurde eine einheitliche Benutzerschnittstelle für alle Versionen gewählt.

Die Bedienung wird über ein Pop-up-Menü vorgenommen. Es werden siebzehn Funktionen zur Verfügung gestellt, die durch Anklicken ausgewählt werden können. Alle Funktionen sind als selbst-ablaufende Demonstration ausgelegt, d.h. daß keine Einflußnahme im Sinne von z.B. geeigneter Parameterwahl notwendig ist.

Jede Funktion kann durch Druck auf die linke Maustaste abgebrochen werden.

FRAGGLES 2 © 1993 J. Doorgang	
Farn	(affine Abb.)
Sierpinski	"
Masse Farn	"
Masse Sierpinski	"
Fixpunkte Farn	"
Fixpunkte Sierpinski	"
Farn	(Übergangskern)
Sierpinski	"
Masse Farn	"
Masse Sierpinski	"
Zufällige Irrfahrt	
3D Farn	
3D Sierpinski	
Einzelteile Farn	
Einzelteile Sierpinski	
Rechteck	(deterministisch)
Smiley	"
Quit	

Die Funktionen lassen sich in sechs Gruppen einteilen, die im folgenden beschrieben werden. Die theoretischen Grundlagen werden in Kapitel 2 abgehandelt.

#### Affine Abbildungen

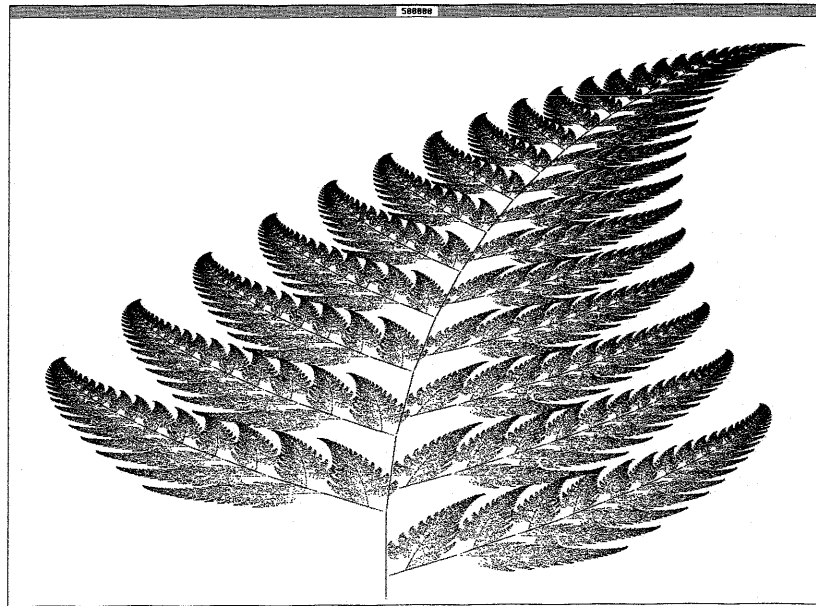
Diese Gruppe von Funktionen erzeugt Fraktale über affine Abbildungen. Verwendet wurden dazu die aus [B] bekannten affinen Abbildungen für den Farn und das Sierpinski-Dreieck (siehe 3.1).

Der zugehörige Markoffprozeß wird definiert über

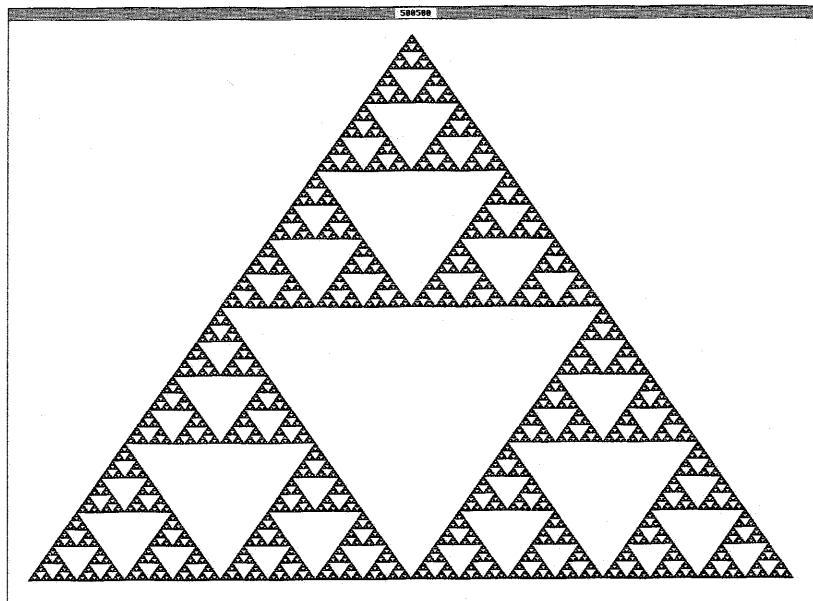
$$K(x, \bullet) = \sum_{i=1}^N p_i \delta_{w_i x}(\bullet),$$

Es entstehen die Fraktale Farn (Bild 1) und Sierpinski Dreieck (Bild 2).

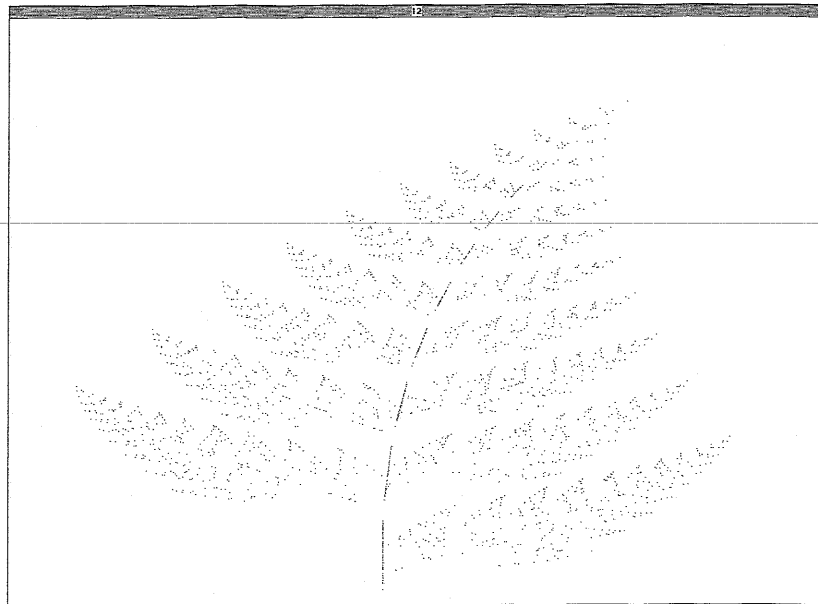
Bild 3 und 4 zeigen die Maßentwicklung der Fraktale, d.h. es wurden 10000 Punkte (Start in (0,0)) in ihrer zeitlichen Entwicklung von der Startverteilung hin zur invarianten Verteilung berechnet (s. Bsp. 3.1.1).



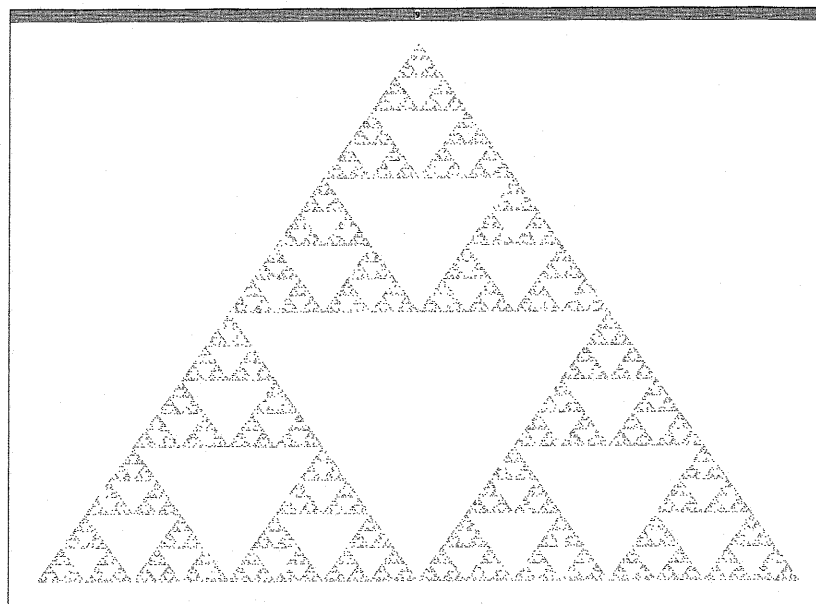
*Bild 1: Farn (affin)*



*Bild 2: Sierpinski-Dreieck (affin)*



*Bild 3: Maßentwicklung Farn (affin)*



*Bild 4: Maßentwicklung Sierpinski-Dreieck (affin)*

Um den Einfluß der affinen Abbildungen auf das Fraktal zu untersuchen, werden die Fixpunkte der einzelnen Abbildungen berechnet und gezeichnet. Hier ist gut zu erkennen, wie die Lage der Fixpunkte ähnlich ist zur Charakteristik des Fraktals.

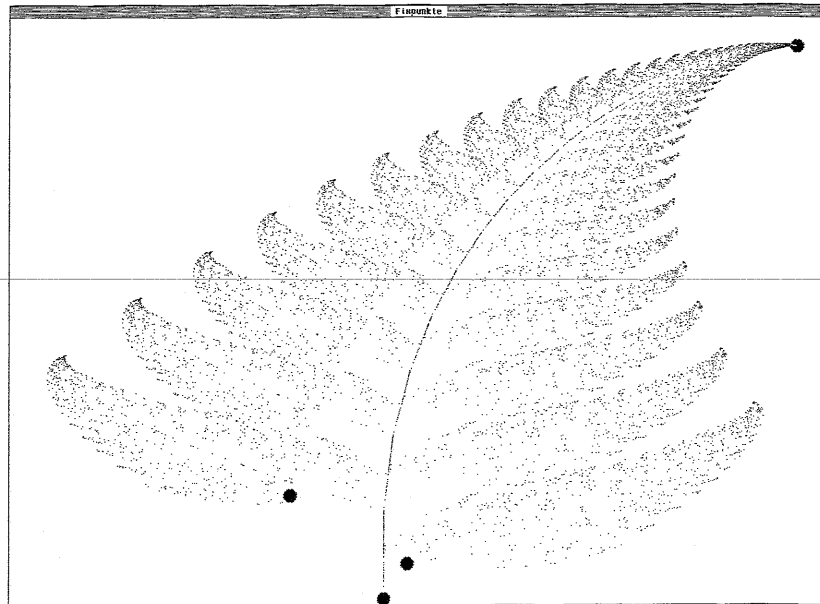


Bild 5: Fixpunkte der Farnabbildungen

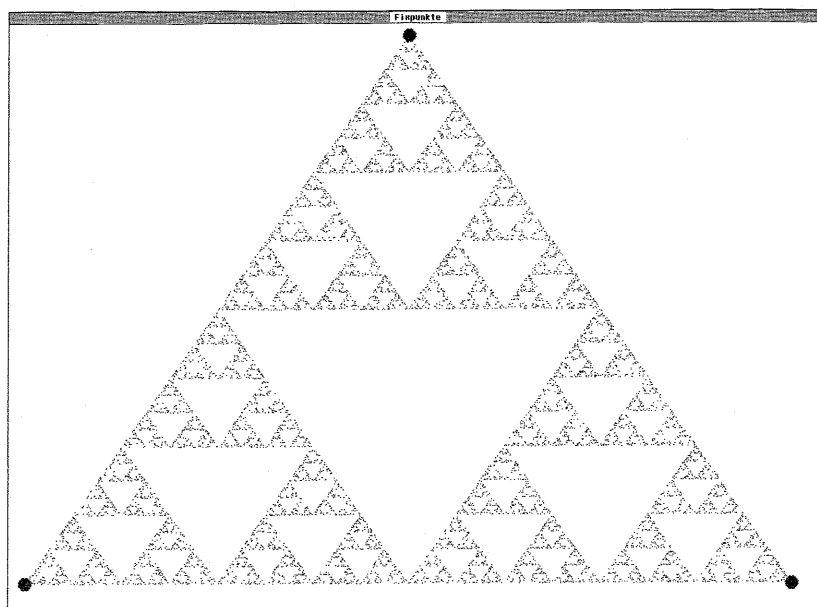


Bild 6: Fixpunkte der Sierpinskiabbildungen

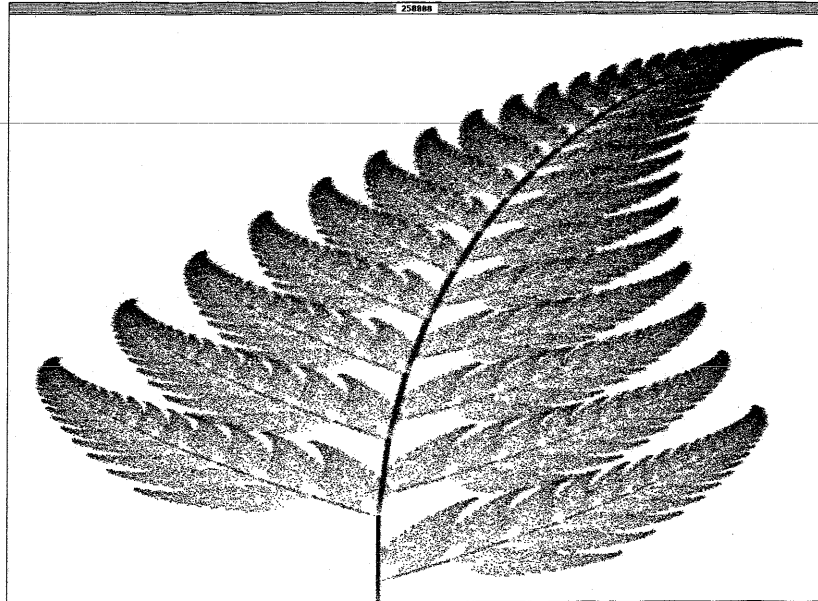
## Übergangskerne

Die bisher benutzten affinen Abbildungen werden nun durch Übergangskerne ersetzt. Konkret wird um den Bildpunkt der bisher verwendeten affinen Abbildung in einem kleinen Bereich gleichverteilt, die Fraktale erhalten einen verwaschenen Eindruck.

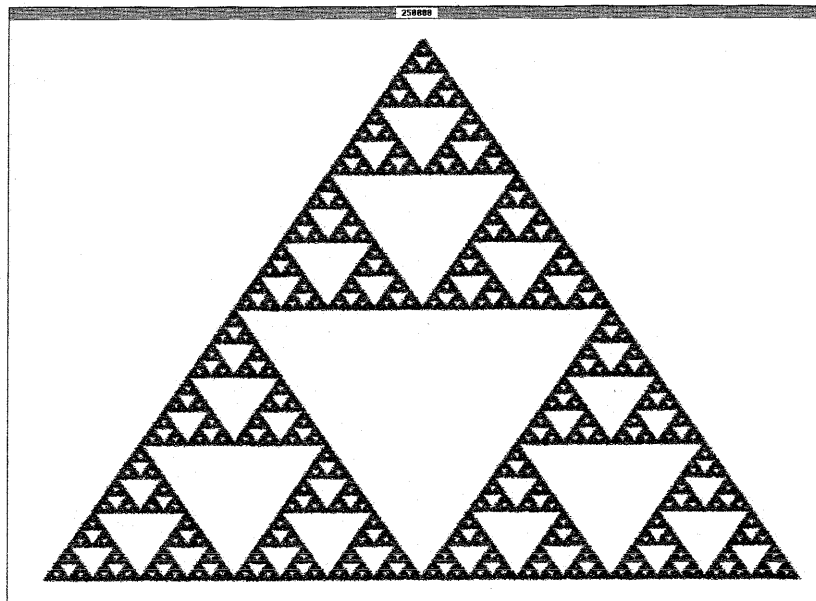
Der zugehörige Markoffprozeß wird definiert durch

$$K(x, \bullet) = \sum p_i K_i(x, \bullet)$$

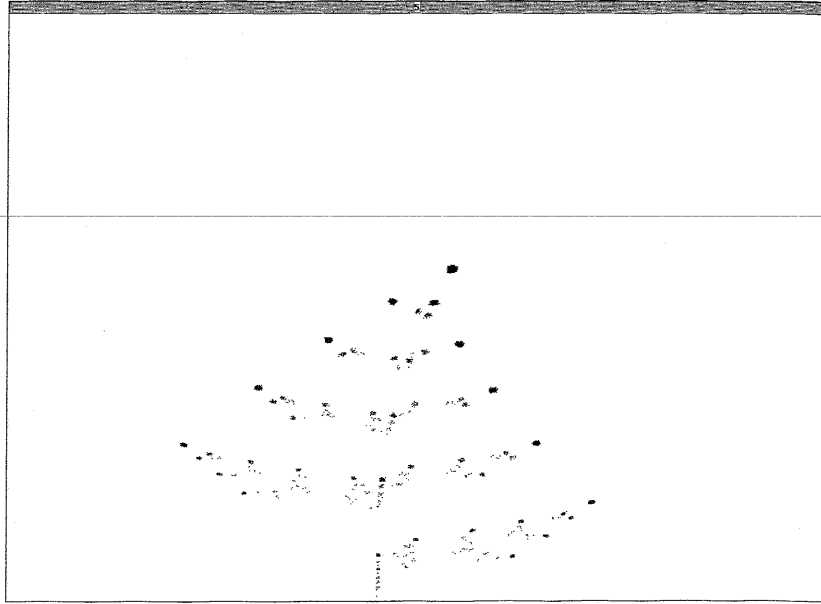
Danach (Bild 9 und 10) folgt wieder die Maßentwicklung bei der Beobachtung von 10000 Punkten (s. Bsp. 3.1.1).



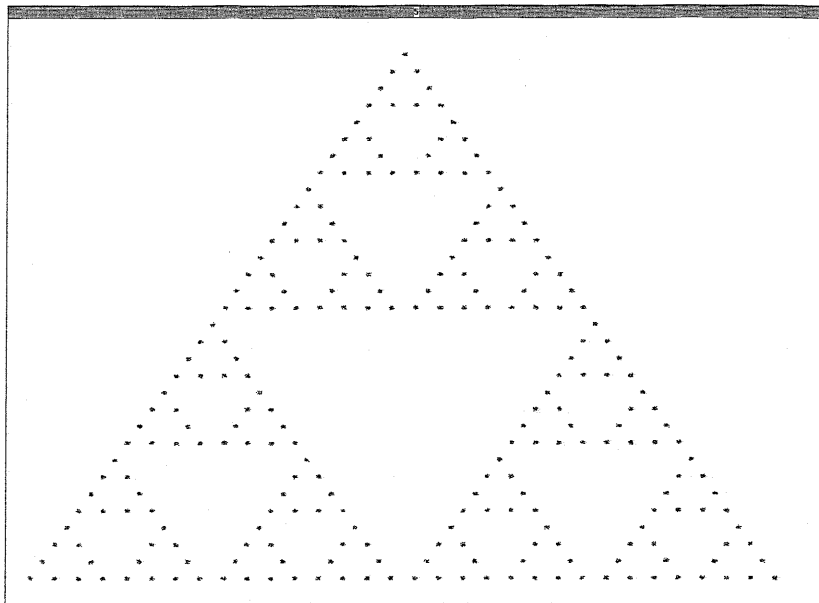
*Bild 7: Farn (Übergangskerne)*



*Bild 8: Sierpinski-Dreieck (Übergangskerne)*



*Bild 9: Maßentwicklung Farn (Übergangskerne)*



*Bild 10: Maßentwicklung Sierpinski (Übergangskerne)*

## Zufällige Irrfahrt

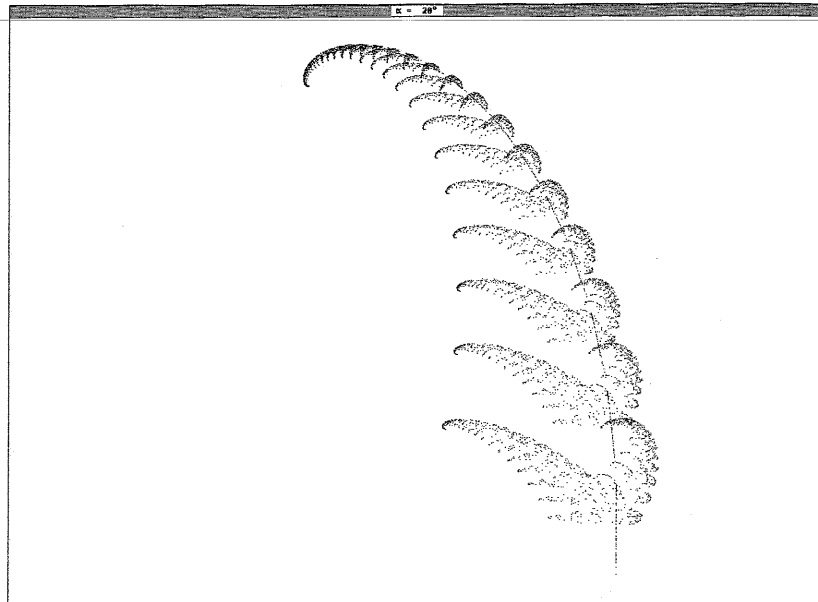
Die zufällige Irrfahrt entsteht durch die Anwendung einer Gleichverteilung um den Punkt selbst als Übergangskern.



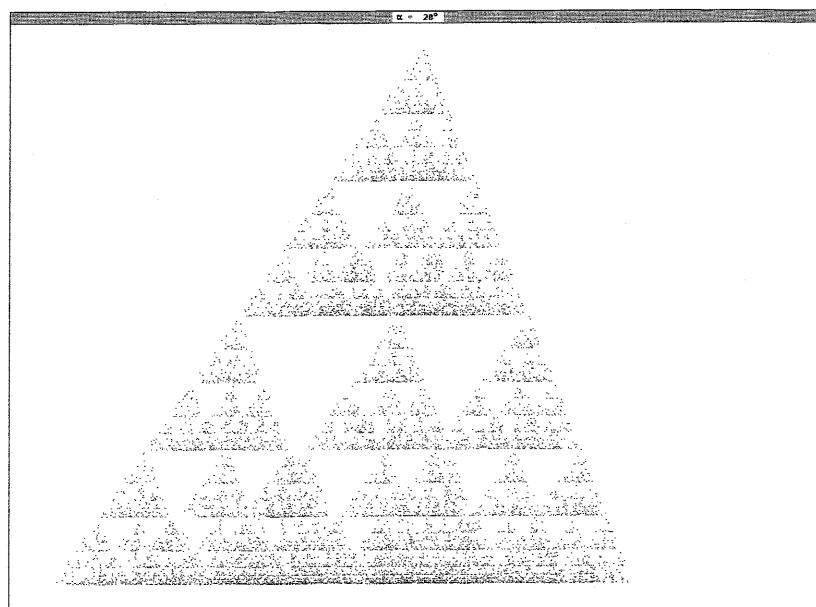
*Bild 11: Zufällige Irrfahrt*

## Dreidimensionale affine Fraktale

Während die bisherigen Beispiele zweidimensional waren, folgen hier Farn und Sierpinski-Dreieck im dreidimensionalen Raum (vgl. [B]). Die räumliche Anschauung wird durch Farbschattierungen unterstützt; tiefere Raumpunkte werden dunkler dargestellt.



*Bild 12: Dreidimensionaler Farn (affin)*

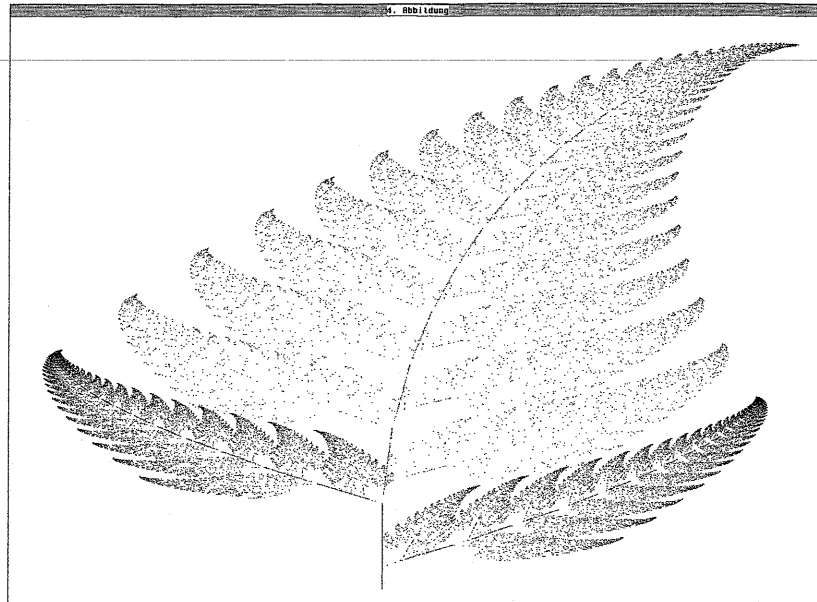


*Bild 13: Dreidimensionaler Sierpinski (affin)*

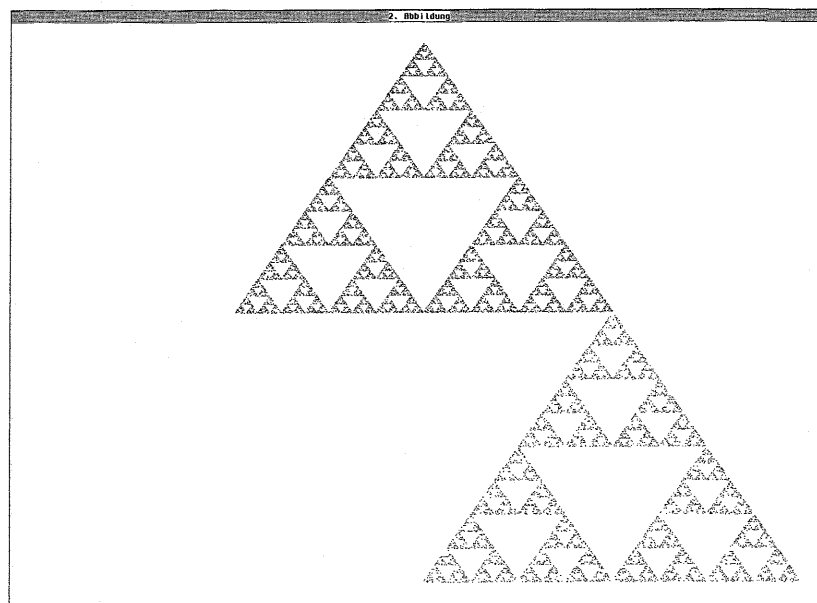


## Einzelabbildungen

Neben der Betrachtung der Fixpunkte der affinen Abbildungen geben auch die Bilder des Fraktals unter jeweils einer Abbildung einen Eindruck des Einflusses der Abbildungen.



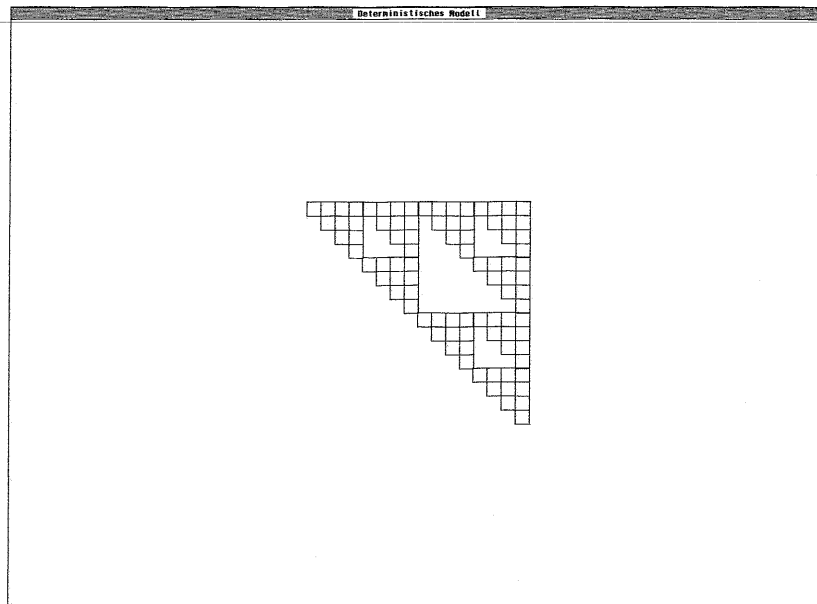
*Bild 14: Einzelteile des Farns*



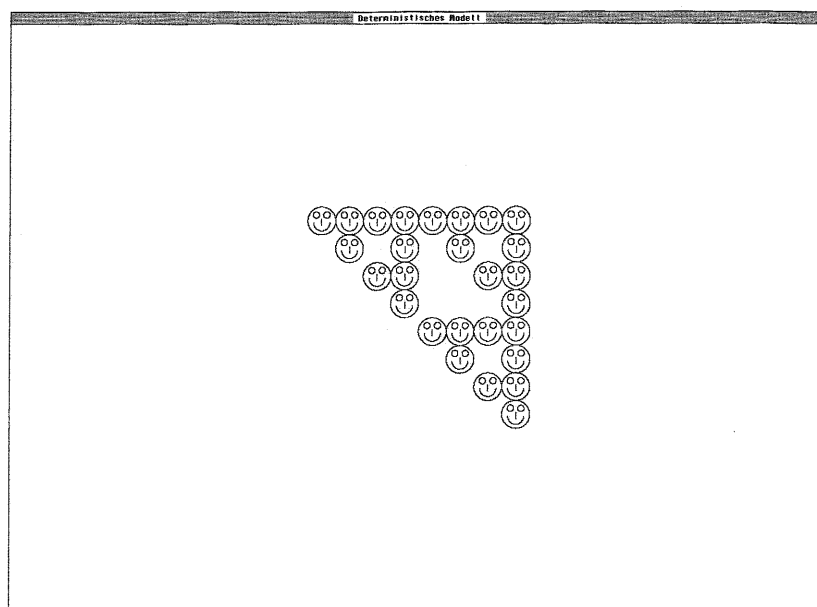
*Bild 15: Einzelteile des Sierpinski-Dreiecks*

## Deterministische Fraktale

Die deterministische Erzeugung von Fraktalen und die Unabhängigkeit von der Ausgangsmenge wird im folgenden Beispiel gezeigt. Ausgehend von einem Rechteck bzw. einem Smiley wird das Sierpinski-Dreieck deterministisch erzeugt (s. Def. 2.1.4).



*Bild 16: Sierpinski (deterministisch aus Rechteck)*



*Bild 17: Sierpinski (deterministisch aus Smiley)*

## A. 2 Version für Apple Macintosh

Das Programm FRAGGLES wurde in True Basic für Apple Rechner geschrieben.

Das Programm simuliert IFS-Fraktale auf dem Computer. Dabei wird ausgehend von einem Startpunkt im  $\mathbb{R}^2$  (hier (0,0)) in jedem Schritt gemäß vorgegebener Wahrscheinlichkeiten eine von endlich vielen affinen Transformationen ausgewählt und diese auf den letzten Punkt angewandt:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mathbf{x}_n + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}. \quad (*)$$

Die Trajektorie erzeugt empirisch den Attraktor des zu den Transformationen mit Wahrscheinlichkeiten gehörenden Systems iterierter Funktionen (IFS).

Theoretische Grundlagen finden sich in Kapitel 2.

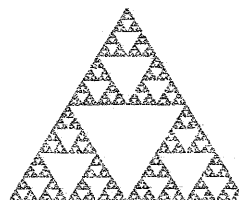
### Bedienung

Das Programm wird über die Tastatur bedient.

Beim Programmstart sind zwei Fenster zu sehen: Im linken, dem Fraktalfenster, soll das Fraktal gezeichnet werden, im rechten, dem Wertefenster, stehen die Parameter einer Transformation des gezeichneten Fraktals, allgemeine Parameter und die Grenzen des Bildausschnittes.

**START** Die Berechnung und die Zeichnung nach den eingestellten Parametern bzw. nach den Defaultwerten startet, wenn die Taste "3" gedrückt wird. Der eingestellte Default ist der Farn.

**VORGEGEBENE FRAKTALE** Als voreingestellte Trajektorien lassen sich der Farn mit "f" und das Sierpinski-dreieck mit "s" wählen.



**TRANSFORMATIONSWERTE** Die 6 oberen Zahlen im Wertefenster sind die Parameter a-f einer Transformation wie in (\*). Sie werden ausgewählt über den Ziffernblock der Tastatur:

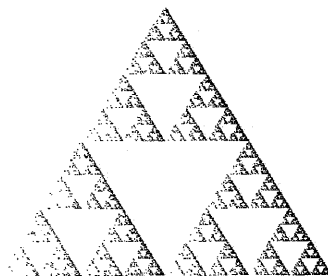
a mit "7"    b mit "8"    e mit "9"  
c mit "4"    d mit "5"    f mit "6" ,

dann können sie mit "+" und "-" verändert werden.



Diese zwei Fraktale ergeben sich mit wenigen Änderungen aus dem Farn.

**WAHRSCHEINLICHKEITEN** Die zur Transformation gehörende Wahrscheinlichkeit wird mit "0" ausgewählt und mit "+" und "-" verändert. Die Summe der Wahrscheinlichkeiten wird angegeben und sollte 1 betragen.



Die Grafik zeigt ein Sierpinski-dreieck, bei dem die Transformationen die Wahrscheinlichkeiten  $p_1 = 0.13$ ,  $p_2 = 0.34$  und  $p_3 = 0.53$  haben.

**TRANSFORMATIONEN** Zu einer anderen zum IFS gehörende Transformation kann man wechseln, indem man "1" drückt und mit "+" und "-" zwischen den Transformationen hin- und herwechselt. Welche der Transformationen gerade angezeigt wird, ist an der Angabe "Matnr. =" (für Matrixnummer) ersichtlich.

**ANZAHL DER TRANSFORMATIONEN** Die Anzahl der Transformationen eines IFS ist angegeben neben "#Mat=" (für Anzahl der Matrizen). Sie wird angesteuert mit "2" und mit "+" und "-" verändert. Verringert man die Zahl der Transformationen, wird diejenige mit der höchsten Nummer gelöscht und die Summe der Wahrscheinlichkeiten verringert sich entsprechend. Erhöht man die Zahl der Transformationen, so wird eine neue Transformation hinzugefügt, bei der alle Einträge und die Wahrscheinlichkeit 0 sind. Sie können dann wie oben beschrieben verändert werden.

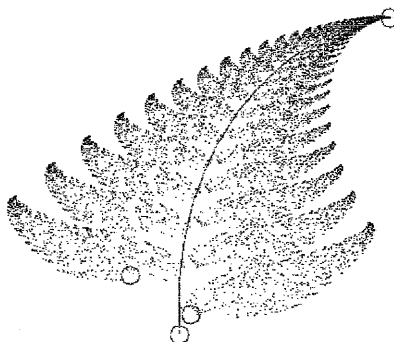
**SCHRITTWEITE** Die Schrittweite der Veränderung mit "+" und "-" wird angegeben neben "step=" und verändert mit "h" und "l" für high und low.

**BILDAUSSCHNITT** Der Bildausschnitt, d.h. jeder Randwert des Fraktalfensters, kann verändert werden. Normalerweise wird ein für das Fraktal angemessener Bildausschnitt aus den ersten 1000 Punkten berechnet. Dann werden Maxima und Minima des Fraktals neben "Xmax=", "Xmin=", "Ymax=" und "Ymin=" angezeigt. Darüber steht "variabel" als Indikator dafür, daß die Werte nach 1000 Punkten errechnet wurden. Die Veränderung des Bildausschnitts wird über "x", "y" und "a" gesteuert. Zur Veränderung des unteren Bildrandes drückt man "y", des linken "x", des oberen "y" und "a" (für mAximum) und des rechten "x" und "a". Dann erscheint ein Rahmen in der Größe der rechts angegeben Extremalwerte, der mit "+" und "-" verändert werden kann. Gleichzeitig ändert sich im Wertefenster der entsprechende Extremalwert und "variabel" wird ersetzt durch "fest", um anzuzeigen, daß die Extrema vom Bediener des Programmes gesetzt wurden. Nach dem Verändern des Bildausschnittes kann dann neu berechnet und gezeichnet werden. Die Defaultwerte der Extrema werden wieder angenommen, wenn man "n" drückt. Dann wird "fest" wieder durch "variabel" ersetzt. Die Vergrößerung des vom Programm berechneten Bildausschnittes bewirkt beim Neuzeichnen, daß das faktisch gleich große Fraktal kleiner als vorher dargestellt wird, während eine Verkleinerung des berechneten Bildausschnittes beim Neuzeichnen einen Ausschnitt des Fraktals vergrößert.

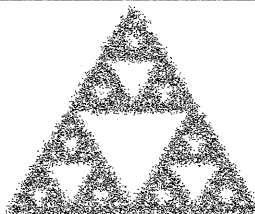


Die Grafik zeigt die vergrößerte Spitze des Farns.

**FIXPUNKTE** Durch Drücken von "u" werden die Fixpunkte der kontraktiven Transformationen berechnet und angezeigt. Nach nochmaligen Drücken werden sie nicht mehr angezeigt.



**KERNE** Neben Transformationen lassen sich auch Übergangskerne zur Erzeugung von IFS-Fraktalen verwenden. Das Drücken von "k" (für Kerne) erzeugt ein solches Fraktal, bei dem als Übergangskern eine Gleichverteilung in einem Quadrat um den durch reine Transformation erhaltenen Punkt gewählt wird. Es ergibt sich eine Verwischung des ursprünglichen Fraktals.



**STREUUNG** Wie groß das Quadrat der Gleichverteilung ist, läßt sich mit "r" und "+" und "-" einstellen und wird neben "r\*1000" angezeigt. Der Parameter wird in Tausendstel des Bildausschnittes angegeben.

**MEHRERE TRAJEKTORIEN** Es ist auch möglich, mehrere Trajektorien unabhängig voneinander laufen zu lassen. Das wird erreicht, wenn man "m" (für Maße) drückt.



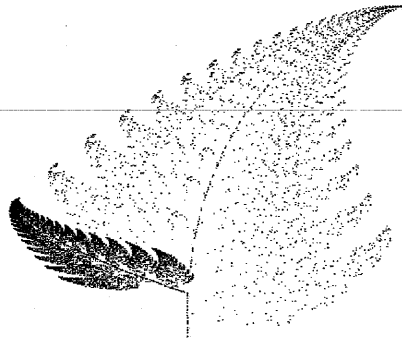
Die Grafik zeigt die Ausbreitung von 1000 Trajektorien mit Start in (0,0) zu den Zeiten 4 und 15.

**ANZAHL DER TRAJEKTORIEN** Die Anzahl der unabhängig voneinander laufenden Trajektorien läßt sich mit "p" (für Punkte) und "+" und "-" einstellen.

**ABHÄNGIGE TRAJEKTORIEN** Es können auch mehrere Trajektorien erzeugt werden, die abhängig voneinander in dem Sinne sind, daß ihnen die gleiche Transformation zugrunde liegt, aber sie sich noch durch die zusätzliche Verteilung mittels des Kerns unterscheiden. Das läßt sich mit "j" erreichen.

**TRANSFORMATION ZEIGEN**

Durch Drücken von "t" wird die Wirkung einer speziellen Transformation gezeigt. In jedem Schritt wird dann die im Wertefenster angezeigte Transformation noch auf den errechneten Punkt angewandt.

**FENSTER LÖSCHEN**

Das Fraktalfenster wird durch Drücken von "c" (für clear) gelöscht.

**HILFE**

Wird "\*" gedrückt, so erscheint anstelle des Wertefensters ein Hilfefenster, in dem die Tastaturbelegung nachgelesen werden kann.

**IRRFAHRT**

Als voreingestellte Trajektorie läßt sich auch eine zufällige Irrfahrt mit "z" wählen. Diese ist kein IFS-Fraktal und wird erzeugt, indem als einzige Transformation die Identität gewählt und mit "r" (s.o.) darum gestreut wird. Danach muß mit "k" (s.o.) gestartet werden, da sonst der Punkt bei Iteration in (0,0) verbleibt.

**HALT**

Die Berechnung und Zeichnung wird durch Drücken einer beliebigen Taste angehalten.

**ENDE**

Um das Programm zu verlassen, drückt man "Esc".